

MATEMÁTICA

Principais notações

\mathbf{R} – o conjunto de todos os números reais

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$$

(a, b) – par ordenado

gof – função composta de g e f

A^{-1} – matriz inversa da matriz A

A^T – matriz transposta da matriz A

$\det(A)$ – determinante da matriz A

As questões de **01 a 15 não devem ser resolvidas no caderno de respostas**. Para respondê-las, marque a opção escolhida para cada questão na **folha de leitura óptica** e na **folha de respostas** (que se encontra na última página do caderno de respostas).

Questão 1

Sejam $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = 10^{3 \cos 5x}$. Podemos afirmar que

- f é injetora e par e g é ímpar.
- g é sobrejetora e *gof* é par.
- f é bijetora e *gof* é ímpar.
- g é par e *gof* é ímpar.
- f é ímpar e *gof* é par.

alternativa E

Como, para todo $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, f é ímpar.

Temos que, para todo $x \in \mathbf{R}$, $g(x) = 10^{3 \cos 5x} > 0$. Logo g não é sobrejetora.

Finalmente, *gof* : $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\text{gof}(x) = g(f(x)) =$

$$= g(x^3) = 10^{3 \cos 5x^3} \text{ e, portanto, } \text{gof}(-x) =$$

$$= 10^{3 \cos 5(-x)^3} = 10^{3 \cos (-5x^3)} = 10^{3 \cos 5x^3} =$$

$$= \text{gof}(x), \text{ isto é, } \text{gof} \text{ é par.}$$

Assim, podemos afirmar que f é ímpar e *gof* é par.

Questão 2

Denotemos por $n(X)$ o número de elementos de um conjunto finito X . Sejam A, B e C conjuntos tais que $n(A \cup B) = 8$, $n(A \cup C) = 9$, $n(B \cup C) = 10$, $n(A \cup B \cup C) = 11$ e

$n(A \cap B \cap C) = 2$. Então, $n(A) + n(B) + n(C)$ é igual a

- a) 11. b) 14. c) 15. d) 18. e) 25.

alternativa D

Temos

$$n(A \cup B) = 8 \Leftrightarrow n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(A \cap B) = n(A) + n(B) - 8$$

Da mesma forma,

$$n(A \cup C) = 9 \Leftrightarrow n(A \cap C) = n(A) + n(C) - 9 \text{ e}$$

$$n(B \cup C) = 10 \Leftrightarrow n(B \cap C) = n(B) + n(C) - 10.$$

Como $n(A \cup B \cup C) = 11$ e $n(A \cap B \cap C) = 2$,

concluimos que $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) +$

$$+ n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) +$$

$$+ n(A \cap B \cap C) \Leftrightarrow 11 = n(A) + n(B) +$$

$$+ n(C) - (n(A) + n(B) - 8) - (n(A) +$$

$$+ n(C) - 9) - (n(B) + n(C) - 10) + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(A) + n(B) + n(C) = 18$$

Questão 3

Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{20} \frac{20!}{n!(20-n)!} x^n$ uma função real

de variável real em que $n!$ indica o fatorial de n . Considere as afirmações:

I. $f(1) = 2$.

II. $f(-1) = 0$.

III. $f(-2) = 1$.

Podemos concluir que

- Somente as afirmações I e II são verdadeiras.
- Somente as afirmações II e III são verdadeiras.
- Apenas a afirmação I é verdadeira.
- Apenas a afirmação II é verdadeira.
- Apenas a afirmação III é verdadeira.

alternativa B

$$\text{Temos } f(x) = \sum_{n=0}^{20} \frac{20!}{n!(20-n)!} \cdot x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{20} \binom{20}{n} \cdot x^{20-n} \cdot x^n =$$

$$= (1+x)^{20}, f: R \rightarrow R.$$

Logo

I. Falsa. $f(1) = (1+1)^{20} = 2^{20}$.

II. Verdadeira. $f(-1) = (1+(-1))^{20} = 0$.

III. Verdadeira. $f(-2) = (1+(-2))^{20} = 1$.

Questão 4

Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

- a) 144. b) 180. c) 240.
d) 288. e) 360.

alternativa A

Podemos formar $2! \cdot 5!$ números de seis algarismos distintos nos quais o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes. Podem ainda ser formados $2! \cdot 2! \cdot 4!$ números que, além das condições acima, também tenham o 1 e o 2 ocupando posições adjacentes.

Logo o total de números nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes é $2! \cdot 5! - 2! \cdot 2! \cdot 4! = 144$.

Questão 5

Sendo 1 e $1 + 2i$ raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, em que a , b e c são números reais, então

- a) $b + c = 4$. b) $b + c = 3$. c) $b + c = 2$.
d) $b + c = 1$. e) $b + c = 0$.

alternativa C

Como os coeficientes da equação polinomial são reais e ela admite a raiz $1 + 2i$, então admite também a raiz conjugada $1 + 2i = 1 - 2i$, ou seja, as raízes da equação são 1 , $1 + 2i$ e $1 - 2i$.

Das relações entre coeficientes e raízes,

$$\begin{cases} \frac{b}{1} = 1 \cdot (1 + 2i) + 1 \cdot (1 - 2i) + (1 + 2i) \cdot (1 - 2i) \\ -\frac{c}{1} = 1 \cdot (1 + 2i) \cdot (1 - 2i) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ c = -5 \end{cases}$$

Portanto $b + c = 7 + (-5) = 2$.

Questão 6

A soma das raízes reais positivas da equação

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \text{ vale}$$

- a) 2. b) 5. c) $\sqrt{2}$. d) 1. e) $\sqrt{3}$.

alternativa C

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = y \\ y^2 - 5y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = y \\ (y = 1 \text{ ou } y = 4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 = 2^0 \\ \text{ou} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ \text{ou} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 4 = 2^2 \\ \text{ou} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Assim, a soma das raízes reais positivas da equação é $\sqrt{2}$.

Questão 7

Sendo I um intervalo de números reais com extremidades em a e b , com $a < b$, o número real $b - a$ é chamado de comprimento de I .

Considere a inequação

$$6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0.$$

A soma dos comprimentos dos intervalos nos quais ela é verdadeira é igual a

- a) $\frac{3}{4}$. b) $\frac{3}{2}$. c) $\frac{7}{3}$. d) $\frac{11}{6}$. e) $\frac{7}{6}$.

alternativa D

Seja $p(x) = 6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x = x(6x^3 - 5x^2 - 7x + 4)$.

Como $p(-1) = 0$, dividamos $6x^3 - 5x^2 - 7x + 4$ por $x - (-1) = x + 1$,

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 6 & -5 & -7 & 4 \\ & 6 & -11 & 4 & 0 \end{array}$$

Assim $p(x) = x \cdot (x + 1)(6x^2 - 11x + 4)$ e

$6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x + 1)(6x^2 - 11x + 4) < 0$.

Sendo $A(x) = x$, $B(x) = x + 1$ e

$C(x) = 6x^2 - 11x + 4$, $C(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou

$x = \frac{4}{3}$, e estudando o sinal de $A \cdot B \cdot C$, obtemos:

	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	
A	-	-	+	+	+
B	-	+	+	+	+
C	+	+	+	-	+
A . B . C	+	-	+	-	+

Assim a soma dos comprimentos dos intervalos nos quais a inequação é verdadeira é igual a

$(0 - (-1)) + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{6}$.

Questão 8

Seja $S = [-2, 2]$ e considere as afirmações:

I. $\frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x < 6$, para todo $x \in S$.

II. $\frac{1}{\sqrt{32 - 2^x}} < \frac{1}{\sqrt{32}}$, para todo $x \in S$.

III. $2^{2x} - 2^x \leq 0$, para todo $x \in S$.

Então, podemos dizer que

- a) apenas I é verdadeira.
- b) apenas III é verdadeira.
- c) somente I e II são verdadeiras.
- d) apenas II é falsa.
- e) todas as afirmações são falsas.

alternativa A

I. Verdadeira. Temos $-2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x < 6$.

II. Falsa. Por exemplo, se $x = 2 \in S$,

$\frac{1}{\sqrt{32 - 2^x}} = \frac{1}{\sqrt{32 - 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{28}} > \frac{1}{\sqrt{32}}$.

III. Falsa. Por exemplo, se $x = 2 \in S$,

$2^{2x} - 2^x = 2^{2 \cdot 2} - 2^2 = 16 - 4 > 0$.

Questão 9

Seja z_0 o número complexo $1 + i$. Sendo S o conjunto solução no plano complexo de $|z - z_0| = |z + z_0| = 2$, então o produto dos elementos de S é igual a

- a) $4(1 - i)$.
- b) $2(1 + i)$.
- c) $2(i - 1)$.
- d) $-2i$.
- e) $2i$.

alternativa E

As medidas das diagonais do paralelogramo de lados adjacentes $z - 0$ e $z_0 - 0$ são $|z - z_0|$ e $|z + z_0|$. Como $|z_0 - 0| = |z_0| = \sqrt{2}$ é a medida de um dos lados do paralelogramo e $|z - z_0| = |z + z_0| = 2$, então $|z - z_0| = |z + z_0| = |z_0|\sqrt{2}$ e, portanto, o paralelogramo é um quadrado.

Assim, as soluções de $|z - z_0| = |z + z_0| = 2$ são obtidas de z_0 por rotação de centro na origem e ângulos de 90° e -90° , ou seja, são iz_0 e $-iz_0$, cujo produto é $(iz_0)(-iz_0) = z_0^2 = (1 + i)^2 = 2i$.

Questão 10

Considere $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = 2 \sin 3x - \cos\left(\frac{x - \pi}{2}\right)$. Sobre f podemos afirmar que:

- a) é uma função par.
- b) é uma função ímpar e periódica de período fundamental 4π .

c) é uma função ímpar e periódica de período fundamental $4\pi/3$.

d) é uma função periódica de período fundamental 2π .

e) não é par, não é ímpar e não é periódica.

alternativa B

Como $\cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \sin\frac{x}{2}$,

temos: $f(x) = 2 \sin 3x - \cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) =$

$= 2 \sin 3x - \sin\frac{x}{2}$. Para todo $x \in R$, $f(-x) =$

$= 2 \sin 3(-x) - \sin\left(\frac{-x}{2}\right) = -2 \sin 3x +$

$+ \sin\frac{x}{2} = -f(x)$, ou seja, f é ímpar. Os períodos

de $2 \sin 3x$ e $\sin\frac{x}{2}$ são, respectivamente, $\frac{2\pi}{3}$ e

$\frac{2\pi}{1} = 4\pi$. Como $4\pi = 6\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, f é periódica de pe-

ríodo fundamental 4π .

Questão 11

O valor de n que torna a seqüência

$$2 + 3n, -5n, 1 - 4n$$

uma progressão aritmética pertence ao intervalo

- a) $[-2, -1]$. b) $[-1, 0]$. c) $[0, 1]$.
d) $[1, 2]$. e) $[2, 3]$.

alternativa B

A seqüência dada é progressão aritmética se, e somente se,

$$2 + 3n + 1 - 4n = 2. \quad (-5n) \Leftrightarrow n = -\frac{1}{3}.$$

Como $-1 \leq -\frac{1}{3} \leq 0$, $n \in [-1, 0]$.

Questão 12

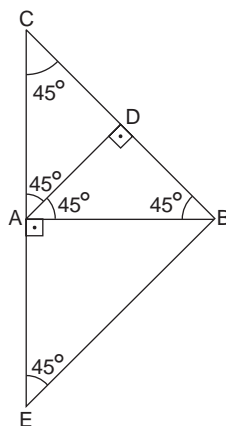
Considere um triângulo isósceles ABC , retângulo em A . Seja D a intersecção da bissetriz do ângulo \hat{A} com o lado \overline{BC} e E um ponto da reta suporte do cateto \overline{AC} de tal modo que os segmentos de reta \overline{BE} e \overline{AD} sejam paralelos.

Sabendo que \overline{AD} mede $\sqrt{2}$ cm, então a área do círculo inscrito no triângulo EBC é

- a) $\pi(4 - 2\sqrt{3})$ cm². b) $2\pi(3 - 2\sqrt{2})$ cm².
c) $3\pi(4 - 2\sqrt{3})$ cm². d) $4\pi(3 - 2\sqrt{2})$ cm².
e) $\pi(4 - 2\sqrt{2})$ cm².

alternativa D

Como ABC é um triângulo isósceles, retângulo em A , temos que $m(\hat{ACB}) = m(\hat{ABC}) = 45^\circ$. \overline{AD} é bissetriz de \hat{BAC} , logo $m(\hat{CAD}) = m(\hat{BAD}) = 45^\circ$. Como \overline{BE} é paralelo a \overline{AD} , $m(\hat{CEB}) = m(\hat{CAD}) = 45^\circ$.



Temos $AC = AB = AE = AD\sqrt{2} = 2$ cm, $BE = BC = AC\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ cm e $EC = 2AC = 4$ cm. Assim, o semiperímetro do triângulo BCE é $\frac{BC + BE + EC}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4}{2} = 2\sqrt{2} + 2$ cm

e sua área é $\frac{CE \cdot AB}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$ cm².

Portanto o raio da circunferência inscrita no triângulo EBC é $\frac{4}{2\sqrt{2} + 2} = 2(\sqrt{2} - 1)$ cm e sua área

$$\pi(2(\sqrt{2} - 1))^2 = 4\pi(3 - 2\sqrt{2})$$
 cm².

Questão 13

A área de um triângulo é de 4 unidades de superfície, sendo dois de seus vértices os pontos $A : (2, 1)$ e $B : (3, -2)$. Sabendo que o terceiro vértice encontra-se sobre o eixo das abscissas, pode-se afirmar que suas coordenadas são

- a) $(-1/2, 0)$ ou $(5, 0)$. b) $(-1/2, 0)$ ou $(4, 0)$.
 c) $(-1/3, 0)$ ou $(5, 0)$. d) $(-1/3, 0)$ ou $(4, 0)$.
 e) $(-1/5, 0)$ ou $(3, 0)$.

alternativa C

Seja $C = (x; 0)$ o terceiro vértice. Assim, podemos escrever:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} |x - 4 - 3 + 2x| = 4 \Leftrightarrow |3x - 7| = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

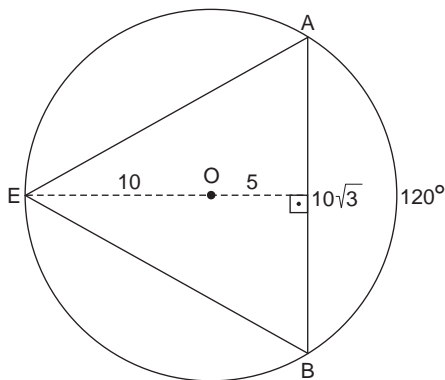
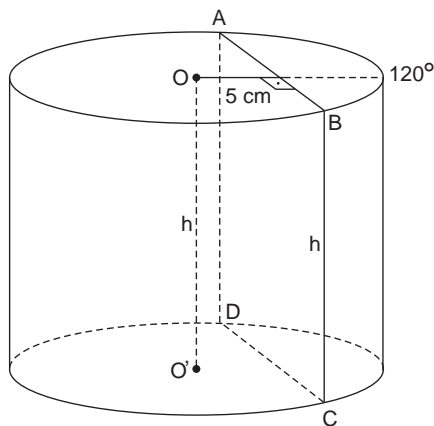
Logo $C = (5; 0)$ ou $C = \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$.

Questão 14

Um cilindro circular reto é seccionado por um plano paralelo ao seu eixo. A secção fica a 5 cm do eixo e separa na base um arco de 120° . Sendo de $30\sqrt{3} \text{ cm}^2$ a área da secção plana retangular, então o volume da parte menor do cilindro seccionado mede, em cm^3 ,

- a) $30\pi - 10\sqrt{3}$. b) $30\pi - 20\sqrt{3}$.
 c) $20\pi - 10\sqrt{3}$. d) $50\pi - 25\sqrt{3}$.
 e) $100\pi - 75\sqrt{3}$.

alternativa E



Nas figuras, a secção é o retângulo ABCD, cujos lados são a altura do cilindro e a corda \overline{AB} correspondente a um arco de 120° na circunferência da base. Essa corda é o lado do triângulo equilátero ABE, inscrito na circunferência. Como o apótema desse triângulo (distância do centro aos lados) mede 5 cm, concluímos que o raio da circunferência mede 10 cm, e o lado do triângulo equilátero inscrito mede, portanto, $10\sqrt{3}$ cm. Sendo h a altura do cilindro, a área da secção vale $10\sqrt{3} \cdot h = 30\sqrt{3} \Leftrightarrow h = 3$ cm.

O volume pedido é o produto da área do segmento circular de raio 10 cm e ângulo 120° pela altura do cilindro, ou seja,

$$\left(\frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 10^2 - \frac{10^2 \cdot \text{sen } 120^\circ}{2} \right) \cdot 3 = 100\pi - 75\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

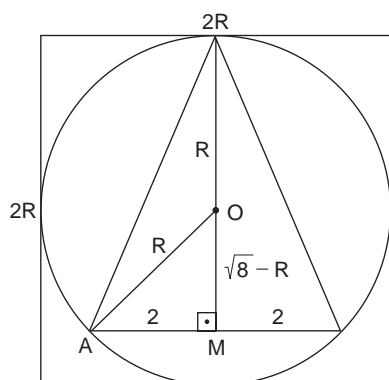
Questão 15

Um cone circular reto com altura de $\sqrt{8}$ cm e raio da base de 2 cm está inscrito numa esfera que, por sua vez, está inscrita num cilindro. A razão entre as áreas das superfícies totais do cilindro e do cone é igual a

- a) $\frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1)$. b) $\frac{9}{4}(\sqrt{2} - 1)$.
 c) $\frac{9}{4}(\sqrt{6} - 1)$. d) $\frac{27}{8}(\sqrt{3} - 1)$.
 e) $\frac{27}{16}(\sqrt{3} - 1)$.

alternativa D

Um plano contendo o eixo do cilindro determina a secção representada na figura a seguir.



Questão 17

Sabe-se que x é um número real pertencente ao intervalo $]0, 2\pi[$ e que o triplo da sua secante, somado ao dobro da sua tangente, é igual a 3. Então, o cosseno de x é igual a

- a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. b) $\frac{2}{7}$. c) $\frac{5}{13}$. d) $\frac{15}{26}$. e) $\frac{13}{49}$.

alternativa C

Temos

$$3 \sec x + 2 \operatorname{tg} x = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{\cos x} + 2 \frac{\sin x}{\cos x} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos x - 2 \sin x = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{13}} \cos x - \frac{2}{\sqrt{13}} \sin x = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Seja $\alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}}$. Então $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha =$

$$= \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ e } \operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}. \text{ Portanto}$$

$$\cos \alpha \cdot \cos x - \operatorname{sen} \alpha \cdot \sin x = \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(x + \alpha) = \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -2\alpha + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Como $0 < x < 2\pi$, concluímos que $x = 2\pi - 2\alpha$.

$$\text{Logo } \cos x = \cos(2\pi - 2\alpha) = \cos 2\alpha =$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \right)^2 - 1 = \frac{18}{13} - 1 = \frac{5}{13}.$$

Questão 18

Seja $P(x)$ um polinômio divisível por $x - 1$. Dividindo-o por $x^2 + x$, obtêm-se o quociente $Q(x) = x^2 - 3$ e o resto $R(x)$. Se $R(4) = 10$, então o coeficiente do termo de grau 1 de $P(x)$ é igual a

- a) -5. b) -3. c) -1. d) 1. e) 3.

alternativa C

Como $P(x)$ é divisível por $x - 1$, $P(1) = 0$.

Temos

$$P(x) = (x^2 - 3) \cdot (x^2 + x) + R(x), \text{ onde}$$

$$R(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

No triângulo retângulo OAM, temos

$$R^2 = 2^2 + (\sqrt{8} - R)^2 \Leftrightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ cm.}$$

A área da superfície total do cilindro é

$$2 \cdot \pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = 6\pi R^2 = 6\pi \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right)^2 = 27\pi \text{ cm}^2.$$

A geratriz do cone é $\sqrt{2^2 + (\sqrt{8})^2} = 2\sqrt{3}$ cm. Assim, a área da superfície total do cone é

$$\pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\pi(\sqrt{3} + 1) \text{ cm}^2.$$

A razão entre as duas áreas, na ordem apresentada, é $\frac{27\pi}{4\pi(\sqrt{3} + 1)} = \frac{27}{8}(\sqrt{3} - 1)$.

Questão 16

Duas retas r_1 e r_2 são paralelas à reta $3x - y = 37$ e tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$. Se d_1 é a distância de r_1 até a origem e d_2 é a distância de r_2 até a origem, então $d_1 + d_2$ é igual a

- a) $\sqrt{12}$. b) $\sqrt{15}$. c) $\sqrt{7}$. d) $\sqrt{10}$. e) $\sqrt{5}$.

alternativa E

Temos que r_1 e r_2 são tangentes à circunferência

$$\text{de centro } C = \left(1; \frac{1}{2} \right) \text{ e raio } \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Como a origem pertence à circunferência, $d_1 + d_2$ é igual à distância entre r_1 e r_2 , ou seja, é igual ao diâmetro da circunferência. Logo $d_1 + d_2 = \sqrt{5}$.

$$\text{Assim, } \begin{cases} P(1) = 0 \\ R(4) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 + a + b = 0 \\ 4a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

Logo $R(x) = 2x + 2$ e $P(x) =$

$$= (x^2 - 3) \cdot (x^2 + x) + 2x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2.$$

Então o coeficiente do termo de grau 1 de $P(x)$ é -1 .

Questão 19

Considere as matrizes

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Se X é solução de $M^{-1}NX = P$, então $x^2 + y^2 + z^2$ é igual a

- a) 35. b) 17. c) 38. d) 14. e) 29.

alternativa A

$$\text{Temos } M^{-1}NX = P \Leftrightarrow NX = MP \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = -1 \\ 3x + 2y = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Logo } x^2 + y^2 + z^2 = (-3)^2 + 5^2 + 1^2 = 35.$$

Questão 20

Seja x um número real positivo, considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} \log_{1/3} x & \log_{1/3} x^2 & 1 \\ 0 & -\log_3 x & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & \log_{1/3} x^2 \\ 1 & 0 \\ -3 \log_{1/3} x & -4 \end{pmatrix}.$$

A soma de todos os valores de x para os quais $(AB) = (AB)^T$ é igual a

- a) $\frac{25}{3}$. b) $\frac{28}{3}$. c) $\frac{32}{3}$.
d) $\frac{27}{2}$. e) $\frac{25}{2}$.

alternativa B

$$\text{Seja } AB = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}. \text{ Temos}$$

$$AB = (AB)^T \Leftrightarrow C = C^T \Leftrightarrow c_{12} = c_{21} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{1/3} x \cdot \log_{1/3} x^2 + \log_{1/3} x^2 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) =$$

$$= 0 \cdot 0 + (-\log_3 x) \cdot 1 + 1 \cdot (-3 \log_{1/3} x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (\log_{1/3} x)^2 - 4 = \log_{1/3} x - 3 \log_{1/3} x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_{1/3} x)^2 + (\log_{1/3} x) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1/3} x = -2 \\ \text{ou} \\ \log_{1/3} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ \text{ou} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

A soma dos valores de x é $9 + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}$.

Questão 21

Considere as matrizes reais

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $a \neq 0$ e a, b e c formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q > 0$. Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 as raízes da equação

$\det(M - \lambda I) = 0$. Se

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = a \text{ e } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7a,$$

então $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a

- a) $\frac{21}{8}$. b) $\frac{91}{9}$. c) $\frac{36}{9}$.
 d) $\frac{21}{16}$. e) $\frac{91}{36}$.

alternativa A

Temos $\det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & c - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - \lambda)(b - \lambda)(c - \lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = a \text{ ou } \lambda = b \text{ ou } \lambda = c.$$

Como a , b e c formam, nessa ordem, uma PG de razão $q > 0$, com $a \neq 0$, $b = aq$ e $c = aq^2$.

$$\text{Assim} \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot aq \cdot aq^2 = a \\ a + aq + aq^2 = 7a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 q^3 = 1 \\ q^2 + q - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1}{8} \\ q = 2 \end{cases}$$

$$\text{Logo } a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (aq)^2 + (aq^2)^2 = a^2(1 + q^2 + q^4) = \frac{1}{8}(1 + 4 + 16) = \frac{21}{8}.$$

Questão 22

Num triângulo acutângulo ABC , o lado oposto ao ângulo \hat{A} mede 5 cm . Sabendo que

$$\hat{A} = \arccos \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \hat{C} = \arcsen \frac{2}{\sqrt{5}},$$

então a área do triângulo ABC é igual a

- a) $\frac{5}{2} \text{ cm}^2$. b) 12 cm^2 .
 c) 15 cm^2 . d) $2\sqrt{5} \text{ cm}^2$.
 e) $\frac{25}{2} \text{ cm}^2$.

alternativa E

Temos que

$$\cos \hat{A} = \frac{3}{5}, \quad \text{sen } \hat{A} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},$$

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \hat{C} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ e,}$$

$$\text{portanto, } \text{sen } \hat{B} = \text{sen}(\pi - (\hat{A} + \hat{C})) =$$

$$= \text{sen}(\hat{A} + \hat{C}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Pela lei dos senos,

$$\frac{AB}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{BC}{\text{sen } \hat{A}} \Leftrightarrow \frac{AB}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{5}{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow AB = \frac{25}{2\sqrt{5}} \text{ cm}.$$

A área do triângulo ABC é igual a:

$$\frac{AB \cdot BC \cdot \text{sen } \hat{B}}{2} = \frac{\frac{25}{2\sqrt{5}} \cdot 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{25}{2} \text{ cm}^2.$$

Questão 23

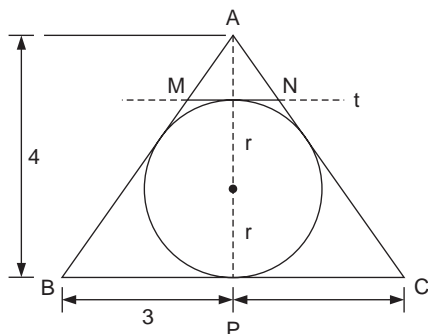
Considere a circunferência inscrita num triângulo isósceles com base de 6 cm e altura de 4 cm . Seja t a reta tangente a esta circunferência e paralela à base do triângulo. O segmento de t compreendido entre os lados do triângulo mede

- a) 1 cm . b) $1,5 \text{ cm}$. c) 2 cm .
 d) $2,5 \text{ cm}$. e) 3 cm .

alternativa B

No desenho temos $AB = AC$ e $BC = 6$.

Sendo P o ponto médio de \overline{BC} , temos $BP = 3$. Como o triângulo é isósceles, então a altura é $AP = 4$, e por Pitágoras, temos $AB = AC = 5$.



Logo o raio da circunferência inscrita é

$$r = \frac{\text{área } \triangle ABC}{\text{semiperímetro } \triangle ABC} = \frac{\frac{6 \cdot 4}{2}}{\frac{6+5+5}{2}} = \frac{3}{2}.$$

A reta t determina o triângulo AMN semelhante ao triângulo ABC , pois $MN \parallel BC$. A altura do triângulo AMN , relativa à base MN , é $4 - 2r = 4 - 3 = 1$.

Portanto $\frac{MN}{1} = \frac{6}{4} \Leftrightarrow MN = 1,5 \text{ cm}$.

Questão 24

Considere uma pirâmide regular com altura de $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$ cm. Aplique a esta pirâmide dois cortes planos e paralelos à base de tal maneira que a nova pirâmide e os dois troncos obtidos tenham, os três, o mesmo volume. A altura do tronco cuja base é a base da pirâmide original é igual a

a) $2 \left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} \right)$ cm.

b) $2 \left(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2} \right)$ cm.

c) $2 \left(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{3} \right)$ cm.

d) $2 \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} \right)$ cm.

e) $2 \left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} \right)$ cm.

alternativa D

Seja V o volume da pirâmide original, o volume do tronco cuja base é a base da pirâmide original é $\frac{V}{3}$ e o da pirâmide que se obtém retirando-se

esse tronco da pirâmide original é $V - \frac{V}{3} = \frac{2V}{3}$.

A partir da semelhança das duas pirâmides, sendo h a altura pedida, temos:

$$\left(\frac{\frac{6}{\sqrt[3]{9}} - h}{\frac{6}{\sqrt[3]{9}}} \right)^3 = \frac{2V}{V} \Leftrightarrow \frac{6 - h\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow h = 2 \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} \right) \text{ cm}.$$

Questão 25

Para x no intervalo $[0, \pi/2]$, o conjunto de todas as soluções da inequação

$$\sin(2x) - \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) > 0$$

é o intervalo definido por

- a) $\frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{2}$. b) $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$.
 c) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$. d) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$.
 e) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$.

alternativa A

Para x no intervalo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\sin 2x - \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin\left(\frac{-x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{5x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < 0 (*)$$

Como $\frac{\pi}{4} \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{4} \leq \frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$, então

$$\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0 \text{ e } (*) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{5x}{2} < \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{2}.$$