INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA
VESTIBULAR 2001

PROVA DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. Esta prova tem duração de **três horas e trinta minutos**.
2. Não é permitido deixar o local de exame antes de decorridas **duas horas** do início da prova.
3. Não haverá tempo **suplementar para o preenchimento da folha de leitura óptica.**
4. Você recebeu este **caderno de questões,** um **caderno de soluções** e uma **folha de rascunho.** Verifique se o caderno de questões e de soluções estão completos. Folhas de rascunho adicionais serão fornecidas mediante a devolução da anterior.
5. Você poderá usar **apenas** lápis (ou lapiseira), caneta, borracha e régua. **Não é permitido usar quaisquer outros materiais escolares** (tais como compasso, esquadros, transferidores, calculadora eletrônica, escala).
6. Esta prova é composta de **25 questões de múltipla escolha.** As questões de **16 a 25** devem ser também resolvidas no **caderno de soluções.** Numere agora sequencialmente de 16 a 25, a partir do verso da capa, as folhas do caderno de soluções. O número atribuído a cada página corresponde ao da questão resolvida.
7. Cada questão admite **uma única** resposta.
8. As resoluções das questões **16** a **25** podem ser feitas a lápis e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Respeite a ordem e o espaço disponível no caderno de soluções. Sempre que possível, use desenhos e gráficos.
9. As 25 questões de múltipla escolha correspondem a 50% do valor da prova e a resolução das questões de 16 a 25, aos 50% restantes.
10. Antes do final da prova, você receberá uma **folha de leitura óptica.** Usando **caneta preta,** assinale a opção correspondente à resposta que você atribuiu **a cada uma das 25 questões de múltipla escolha.** Procure preencher **todo** o campo disponível para sua resposta, sem extrapolar-lhe os limites.
11. Na última página do **caderno de soluções,** existe uma **reprodução** da folha de leitura óptica, que deverá ser preenchida com um simples traço a lápis, durante a realização da prova.
12. Cuidado para não errar no preenchimento da **folha de leitura óptica.** Não obstante, se isto ocorrer, avise o fiscal. Ele lhe fornecerá uma folha extra, com o cabeçalho devidamente preenchido.
13. A não devolução do caderno de soluções e/ou da folha de leitura óptica implicará a desclassificação do candidato.
14. Aguarde o aviso para iniciar a prova. Ao terminá-la, avise o fiscal e aguarde-o no seu lugar.

As questões de **01 a 15 não devem ser resolvidas no caderno de soluções.** Para respondê-las, marque a opção escolhida para cada questão na **folha de leitura óptica** e também **na última página do caderno de soluções.**

$\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.
A^c denota o conjunto complementar de $A \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.
A^T é a matriz transposta da matriz A.
(a, b) representa o par ordenado.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; a \leq x \leq b\}$, $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \; ; \; a < x < b\}$.
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \; ; \; a \leq x < b\}$, $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; a < x \leq b\}$.

Questão 01. Se $a \in \mathbb{R}$ é tal que $3y^2 - y + a = 0$ tem raiz dupla, então a solução da equação

$$3^{2x+1} - 3^x + a = 0$$

é:

A ( ) $\log_2 6$ **B** ( ) $-\log_2 6$ **C** ( ) $\log_3 6$

D ( ) $-\log_3 6$ **E** ( ) $1 - \log_3 6$

Questão 02. O valor da soma $a + b$ para que as raízes do polinômio $4x^4 - 20x^3 + ax^2 - 25x + b$ estejam em progressão aritmética de razão $1/2$ é:

A ( ) 36 **B** ( ) 41 **C** ( ) 26 **D** ( ) −27 **E** ( ) −20

Questão 03. Se $z = 1 + i\sqrt{3}$, $z.\overline{w} = 1$ e $\alpha \in [0, 2\pi]$ é um argumento de $z.w$, então α é igual a:

A ( ) $\frac{\pi}{3}$ **B** ( ) π **C** ( ) $\frac{2\pi}{3}$ **D** ( ) $\frac{5\pi}{3}$ **E** ( ) $\frac{3\pi}{2}$

Questão 04. O número complexo

$$z = \frac{1-\cos a}{\operatorname{sen} a \cos a} + i\frac{1-2\cos a + 2 \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} 2a} \quad , \quad a \in]0, \pi/2[$$

tem argumento $\pi/4$. Neste caso, a é igual a:

A ( ) $\frac{\pi}{6}$ **B** ( ) $\frac{\pi}{3}$ **C** ( ) $\frac{\pi}{4}$ **D** ( ) $\frac{\pi}{5}$ **E** ( ) $\frac{\pi}{9}$

Questão 05. Um triângulo tem lados medindo 3 , 4 e 5 centímetros. A partir dele, constrói-se uma seqüência de triângulos do seguinte modo: os pontos médios dos lados de um triângulo são os vértices do seguinte. Dentre as alternativas abaixo, o valor em centímetros quadrados que está mais próximo da soma das áreas dos 78 primeiros triângulos assim construídos, incluindo o triângulo inicial, é:

A ( ) 8 **B** ( ) 9 **C** ( ) 10 **D** ( ) 11 **E** ( ) 12

Questão 06. Sabendo que é de 1024 a soma dos coeficientes do polinômio em x e y, obtido pelo desenvolvimento do binômio $(x+y)^m$, temos que o número de arranjos sem repetição de m elementos, tomados 2 a 2, é:

A ( ) 80 **B** ( ) 90 **C** ( ) 70 **D** ( ) 100 **E** ( ) 60

Questão 07. A respeito das combinações

$$a_n = \binom{2n}{n} \quad \text{e} \quad b_n = \binom{2n}{n-1}$$

temos que, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, a diferença $a_n - b_n$ é igual a:

A ( ) $\frac{n!}{n+1}\, a_n$ **B** ( ) $\frac{2n}{n+1}\, a_n$ **C** ( ) $\frac{n}{n+1}\, a_n$

D ( ) $\frac{2}{n+1} a_n$ **E** ( ) $\frac{1}{n+1}\, a_n$

Questão 08. Sejam A e B matrizes $n \times n$, e B uma matriz simétrica. Dadas as afirmações:

(I) $AB + BA^T$ é simétrica.
(II) $(A + A^T + B)$ é simétrica.
(III) ABA^T é simétrica.

temos que:

A ( ) apenas (I) é verdadeira.
B ( ) apenas (II) é verdadeira.
C ( ) apenas (III) é verdadeira.
D ( ) apenas (I) e (III) são verdadeiras.
E ( ) todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 09. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}$$

A soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa de A é:

A ( ) 1 **B** ( ) 2 **C** ( ) 3 **D** ( ) 4 **E** ( ) 5

Questão 10. Sendo α e β os ângulos agudos de um triângulo retângulo, e sabendo que $\text{sen}^2 2\beta - 2\cos 2\beta = 0$, então sen α é igual a:

A ( ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B** ( ) $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$ **C** ( ) $\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$ **D** ( ) $\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$ **E** ( ) zero

Questão 11. O raio da base de um cone circular reto é igual à média aritmética da altura e a geratriz do cone. Sabendo-se que o volume do cone é $128\pi\ m^3$, temos que o raio da base e a altura do cone medem, respectivamente, em metros:

A ( ) 9 e 8 **B** ( ) 8 e 6 **C** ( ) 8 e 7

D ( ) 9 e 6 **E** ( ) 10 e 8

Questão 12. De dois polígonos convexos, um tem a mais que o outro 6 lados e 39 diagonais. Então, a soma total dos números de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a:

A ( ) 63 **B** ( ) 65 **C** ( ) 66 **D** ( ) 70 **E** ( ) 77

Questão 13. Seja o ponto $A = (r, 0)$, $r > 0$. O lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ tais que é de $3r^2$ a diferença entre o quadrado da distância de P a A e o dobro do quadrado da distância de P à reta $y = -r$, é :

A ( ) uma circunferência centrada em $(r, -2r)$ com raio r.
B ( ) uma elipse centrada em $(r, -2r)$ com semi-eixos valendo r e $2r$.
C ( ) uma parábola com vértice em $(r, -r)$.
D ( ) duas retas paralelas distando $r\sqrt{3}$ uma da outra.
E ( ) uma hipérbole centrada em $(r, -2r)$ com semi-eixos valendo r.

Questão 14. Sejam X, Y e Z subconjuntos próprios de $\mathbb{R}$, não-vazios.

Com respeito às afirmações:

(I) $X \cap \{[Y \cap (X \cup Y)^c] \cup [X \cup (X^c \cap Y^c)^c]\} = X$.
(II) Se $Z \subset X$ então $(Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^c \cap Y)] = X \cup Y$.
(III) Se $(X \cup Y)^c \subset Z$ então $Z^c \subset X$.

temos que:

A ( ) apenas (I) é verdadeira.
B ( ) apenas (I) e (II) são verdadeiras.
C ( ) apenas (I) e (III) são verdadeiras.
D ( ) apenas (II) e (III) são verdadeiras.
E ( ) todas são verdadeiras.

Questão 15. Se $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ é tal que , $\forall x \in]0,1[$,

$$|f(x)| < \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad f(x) = \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$$

então a desigualdade válida para qualquer $n = 1, 2, 3, \ldots$ e $0 < x < 1$ é:

A ( ) $|f(x)| + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}$

B ( ) $\frac{1}{2^n} \leq |f(x)| \leq \frac{1}{2}$

C ( ) $\frac{1}{2^{n+1}} < |f(x)| < \frac{1}{2}$

D ( ) $|f(x)| > \frac{1}{2^n}$

E ( ) $|f(x)| < \frac{1}{2^n}$

As questões de **16 a 25 devem ser resolvidas no caderno de soluções.** Marque também as opções escolhidas para essas questões na **folha de leitura óptica** e no quadro que se encontra **na última página do caderno de soluções.**

Questão 16. Considere as funções

$$f(x) = \frac{5+7^x}{4} \quad , \quad g(x) = \frac{5-7^x}{4} \quad \text{e} \quad h(x) = \operatorname{arctg} x$$

Se a é tal que $h(f(a)) + h(g(a)) = \pi/4$, então $f(a) - g(a)$ vale:

A ( ) 0 B ( ) 1 C ( ) $\frac{7}{4}$ D ( ) $\frac{7}{2}$ E ( ) 7

Questão 17. O conjunto de todos os valores de m para os quais a função

$$f(x) = \frac{x^2 + (2m+3)x + (m^2+3)}{\sqrt{x^2 + (2m+1)x + (m^2+2)}}$$

está definida e é não-negativa para todo x real é:

A ( ) $[\frac{1}{4}, \frac{7}{4}[$ **B** ( ) $]\frac{1}{4}, \infty[$ **C** ( ) $]0, \frac{7}{4}[$

D ( ) $]-\infty, \frac{1}{4}]$ **E** ( ) $]\frac{1}{4}, \frac{7}{4}[$

Questão 18. A parte imaginária de $((1 + \cos 2x) + i \text{ sen } 2x)^k$, k inteiro positivo, x real, é

A ( ) $2.\text{sen}^k x. \cos^k x$
B ( ) $\text{sen}^k x. \cos^k x$
C ( ) $2^k.\text{sen } kx. \cos^k x$
D ( ) $2^k.\text{sen}^k x. \cos^k x$
E ( ) $\text{sen } kx. \cos^k x$

Questão 19. O polinômio com coeficientes reais

$$P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o$$

tem duas raízes distintas, cada uma delas com multiplicidade 2, e duas de suas raízes são 2 e i. Então, a soma dos coeficientes é igual a:

A ( ) -4 **B** ( ) -6 **C** ( ) -1 **D** ( ) 1 **E** ( ) 4

Questão 20. Seja $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x - (\log_4 m)y + 5z = 0 \\ (\log_2 m)x + y - 2z = 0 \\ x + y - (\log_2 m^2)z = 0 \end{cases}$$

O produto dos valores de m para os quais o sistema admite solução não-trivial é:

A ( ) 1 **B** ( ) 2 **C** ( ) 4 **D** ( ) 8 **E** ( ) $2\log_2 5$

Questão 21. Considere os números de 2 a 6 algarismos distintos formados utilizando-se apenas $1, 2, 4, 5, 7$ e 8. Quantos destes números são ímpares e começam com um dígito par?

A ( ) 375 **B** ( ) 465 **C** ( ) 545 **D** ( ) 585 **E** ( ) 625

Questão 22. Sendo dado

$$\ln\left(2\sqrt{4}\sqrt[3]{6}\sqrt[4]{8}\ldots\sqrt[n]{2n}\right) = a_n \quad \text{e} \quad \ln\left(\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{4}\ldots\sqrt[2n]{2n}\right) = b_n$$

então,

$$\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \frac{\ln 5}{5} + \cdots + \frac{\ln 2n}{2n}$$

é igual a:

A ( ) $a_n - 2b_n$ **B** ( ) $2a_n - b_n$ **C** ( ) $a_n - b_n$

D ( ) $b_n - a_n$ **E** ( ) $a_n + b_n$

Questão 23. A razão entre a área da base de uma pirâmide regular de base quadrada e a área de uma das faces é 2. Sabendo que o volume da pirâmide é de $12\ m^3$, temos que a altura da pirâmide mede (em metros):

A ( ) 1 **B** ( ) 2 **C** ( ) 3 **D** ( ) 4 **E** ( ) 5

Questão 24. Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18 cm e a diferença dos dois outros lados é igual a 2 cm. Se r é o raio da circunferência inscrita e a é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma $a + r$ (em cm) é igual a:

A ( ) 12 **B** ( ) 11 **C** ( ) 10 **D** ( ) 9 **E** ( ) 8

Questão 25. O coeficiente angular da reta tangente à elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

no primeiro quadrante e que corta o eixo das abcissas no ponto $P = (8, 0)$ é:

A ( ) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B** ( ) $-\frac{1}{2}$ **C** ( ) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

D ( ) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ **E** ( ) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$