

NOTAÇÕES

<p>C : conjunto dos números complexos. R : conjunto dos números reais. Z : conjunto dos números inteiros. N = f0; 1; 2; 3; :::g: Nⁿ = f1; 2; 3; :::g: z̄ : conjugado do número z ∈ C: i : unidade imaginária; i² = -1: arg z : um argumento de z ∈ C \ {0}: [a; b] = fx ∈ R ; a ≤ x ≤ bg:</p>	<p>]a; b[= fx ∈ R ; a < x < bg: ∅ : conjunto vazio. A ∩ B = fx ∈ A ; x ∈ Bg: X^C = U \ X , para X ⊆ U; U ∈ ∅: I : matriz identidade n ∈ n: A⁻¹ : inversa da matriz inversível A: A^T : transposta da matriz A: AB̄ : segmento de reta unindo os pontos A e B: m(AB̄) : medida (comprimento) de AB̄:</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Questão 01. Seja z ∈ C. Das seguintes afirmações independentes:

I. Se $w = \frac{2iz^2 + 5z + i}{1 + 3z^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|}$, então $\bar{w} = \frac{i(2iz^2 + 5z + i)}{1 + 3z^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|}$

II. Se z ≠ 0 e $w = \frac{2iz + 3i + 3}{(1 + 2i)z}$, então $|w| = \frac{2|z| + 3\sqrt{2}}{5|z|}$

III. Se $w = \frac{(1+i)z^2}{4(3+4i)}$, então $2\arg z + \frac{\pi}{12}$ é um argumento de w.

é (são) verdadeira(s):

- A () todas.
- B () apenas I e II.
- C () apenas II e III.
- D () apenas I e III.
- E () apenas II.

Questão 02. O valor de y² + xz para o qual os números $\frac{\pi}{12}$; x; y; z e $\frac{5\pi}{12}$, nesta ordem, formam uma progressão aritmética, é:

- A () 3i⁴ B () 2i⁶ C () 6i² D () 2i⁵ E () $\frac{2i\sqrt{3}}{4}$

Questão 03. Considere a função

$$f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = \frac{1}{3^x} + \frac{1}{2^{3x}} + \frac{1}{9^{2x}} + \frac{1}{1^{(2x)}} + \frac{1}{3^{2x}} + \frac{1}{5^{1-x}} + 1:$$

A soma de todos os valores de x para os quais a equação y² + 2y + f(x) = 0 tem raiz dupla é:

- A () 0 B () 1 C () 2 D () 4 E () 6

Questão 04. Considere uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não-constante e tal que

$$f(x + y) = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}:$$

Das afirmações:

- I. $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- II. $f(nx) = [f(x)]^n \quad \forall x \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}^+$:
- III. f é par.

é (são) verdadeira(s):

- A () apenas I e II.
- B () apenas II e III.
- C () apenas I e III.
- D () todas.
- E () nenhuma.

Questão 05. Considere o polinômio $P(x) = 2x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, cujos coeficientes $2; a_2; \dots; a_n$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q > 0$. Sabendo que $\frac{1}{2}$ é uma raiz de P e que $P(2) = 5460$; tem-se que o valor de $\frac{n^2 \cdot q^3}{q^4}$ é igual a:

- A () $\frac{5}{4}$ B () $\frac{3}{2}$ C () $\frac{7}{4}$ D () $\frac{11}{6}$ E () $\frac{15}{8}$

Questão 06. Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por $(x - 1)$, obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se $P(x)$ por $(x + 1)$, obtém-se resto igual a 3. Sabendo que $P(x)$ é divisível por $(x - 2)$, tem-se que o valor de $\frac{ab}{c}$ é igual a:

- A () 6 B () 4 C () 4 D () 7 E () 9

Questão 07. Das afirmações abaixo sobre a equação $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ e suas soluções no plano complexo:

- I. A equação possui pelo menos um par de raízes reais.
- II. A equação possui duas raízes de módulo 1, uma raiz de módulo menor que 1 e uma raiz de módulo maior que 1.

III. Se $n \in \mathbb{N}^+$ e r é uma raiz qualquer desta equação, então $\sum_{k=1}^n \frac{r^{-k}}{3} < \frac{1}{2}$.

é (são) verdadeira(s):

- A () nenhuma.
- B () apenas I.
- C () apenas II.
- D () apenas III.
- E () apenas I e III.

Questão 08. Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que a equação $2x^3 + 7x^2 + 4x + k = 0$ possua uma raiz dupla e inteira x_1 e uma raiz x_2 , distinta de x_1 . Então, $(k + x_1)x_2$ é igual a:

- A () 6 B () 3 C () 1 D () 2 E () 8

Questão 09. Considere o conjunto $S = \{(a; b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + b = 18\}$. A soma de todos os números da forma $\frac{18!}{a!b!}$, $(a; b) \in S$, é:

- A () 8^6 B () $9!$ C () 9^6 D () 12^6 E () $12!$

Questão 10. O número de divisores (positivos) de 17640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:

- A () 24 B () 36 C () 48 D () 54 E () 72

Questão 11. Sejam A e P matrizes $n \times n$ inversíveis e $B = P^{-1}AP$. Das afirmações:

- I. B^T é inversível e $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$;
 II. Se A é simétrica, então B também o é.
 III. $\det(A - I) = \det(B - I)$; $8 \in \mathbb{R}$.

é (são) verdadeira(s):

- A () todas.
 B () apenas I.
 C () apenas I e II.
 D () apenas I e III.
 E () apenas II e III.

Questão 12. O número de todos os valores de $a \in [0; 2\pi]$, distintos, para os quais o sistema nas incógnitas $x; y$ e z , dado por

$$\begin{cases} 4x + y + 6z = \cos 3a \\ x + 2y + 5z = \sin 2a \\ 6x + 3y + 4z = 2 \cos a \end{cases}$$

é possível e não-homogêneo, é igual a:

- A () 2 B () 3 C () 4 D () 5 E () 6

Questão 13. Para todo $x \in \mathbb{R}$, a expressão $[\cos(2x)]^2 [\sin(2x)]^2 \sin x$ é igual a:

- A () $2^{-4} [\sin(2x) + \sin(5x) + \sin(7x)]$;
- B () $2^{-4} [2 \sin x + \sin(7x) - \sin(9x)]$;
- C () $2^{-4} [-\sin(2x) - \sin(3x) + \sin(7x)]$;
- D () $2^{-4} [-\sin x + 2 \sin(5x) - \sin(9x)]$;
- E () $2^{-4} [\sin x + 2 \sin(3x) + \sin(5x)]$;

Questão 14. Considere os contradomínios das funções arco-seno e arco-cosseno como sendo $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ e $[0; \frac{1}{4}]$, respectivamente. Com respeito à função

$$f : [-1; 1] \rightarrow [-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}] ; f(x) = \arcsen x + \arccos x ;$$

temos que:

- A () f é não-crescente e ímpar.
- B () f não é par nem ímpar.
- C () f é sobrejetora.
- D () f é injetora.
- E () f é constante.

Questão 15. Considere a família de circunferências com centros no segundo quadrante e tangentes ao eixo Oy. Cada uma destas circunferências corta o eixo Ox em dois pontos, distantes entre si de 4 cm. Então, o lugar geométrico dos centros destas circunferências é parte:

- A () de uma elipse.
- B () de uma parábola.
- C () de uma hipérbole.
- D () de duas retas concorrentes.
- E () da reta $y = -x$:

Questão 16. A área do polígono, situado no primeiro quadrante, que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto

$$f(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0 ;$$

é igual a:

- A () $\frac{9}{6}$
- B () $\frac{5}{2}$
- C () $2\sqrt{2}$
- D () 3
- E () $\frac{10}{3}$

Questão 17. Sejam r e s duas retas paralelas distando entre si 5 cm. Seja P um ponto na região interior a estas retas, distando 4 cm de r . A área do triângulo equilátero PQR , cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s , é igual, em cm^2 , a:

A () $3\sqrt{15}$ B () $7\sqrt{3}$ C () $5\sqrt{6}$ D () $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ E () $\frac{7\sqrt{15}}{2}$

Questão 18. Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto destes três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a 3780° . O número total das diagonais nestes três polígonos é igual a:

A () 63 B () 69 C () 90 D () 97 E () 106

Questão 19. Considere o triângulo isósceles OAB ; com lados \overline{OA} e \overline{OB} de comprimento $\sqrt{2}R$ e lado \overline{AB} de comprimento $2R$. O volume do sólido, obtido pela rotação deste triângulo em torno da reta que passa por O e é paralela ao lado \overline{AB} , é igual a:

A () $\frac{1}{2}R^3$ B () $\frac{1}{4}R^3$ C () $\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3$ D () $\sqrt{2}\frac{1}{4}R^3$ E () $\sqrt{3}\frac{1}{4}R^3$

Questão 20. Considere uma pirâmide regular de altura igual a 5 cm e cuja base é formada por um quadrado de área igual a 8cm^2 . A distância de cada face desta pirâmide ao centro de sua base, em cm, é igual a:

A () $\frac{\sqrt{15}}{3}$ B () $\frac{5\sqrt{6}}{9}$ C () $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ D () $\frac{7}{5}$ E () $\sqrt{3}$

AS QUESTÕES DE 21 A 30 DEVERÃO SER RESOLVIDAS
NO CADERNO DE RESPOSTAS ANEXO.

Questão 21. Sejam U um conjunto não-vazio e $A \subseteq U$, $B \subseteq U$. Usando apenas as definições de igualdade, reunião, intersecção e complementar, prove que:

I. Se $A \setminus B = \emptyset$, então $B \subseteq A$.

II. $B \cap A^c = B \setminus A$.

Questão 22. Determine o conjunto dos números complexos z para os quais o número

$$w = \frac{z + \bar{z} + 2}{|z - 1| + |z + 1| + 3}$$

pertence ao conjunto dos números reais. Interprete (ou identifique) este conjunto geometricamente e faça um esboço do mesmo.

Questão 23. Considere a seguinte situação baseada num dos paradoxos de Zenão de Eléia, filósofo grego do século V A.C. Suponha que o atleta Aquiles e uma tartaruga apostam uma corrida em linha reta, correndo com velocidades constantes v_A e v_T , com $0 < v_T < v_A$: Como a tartaruga é mais lenta, é-lhe dada uma vantagem inicial, de modo a começar a corrida no instante $t = 0$ a uma distância $d_1 > 0$ na frente de Aquiles. Calcule os tempos $t_1; t_2; t_3; \dots$ que Aquiles precisa para percorrer as distâncias $d_1; d_2; d_3; \dots$; respectivamente, sendo que, para todo $n \geq 2$, d_n denota a distância entre a tartaruga e Aquiles no instante t_{n-1} da corrida. Verifique que os termos $t_k; k = 1; 2; 3; \dots$; formam uma progressão geométrica infinita, determine sua soma e dê o significado desta soma.

Questão 24. Mostre que toda função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo $f(xy) = f(x) + f(y)$ em todo seu domínio, é par.

Questão 25. Sejam $a; b; c$ e d constantes reais. Sabendo que a divisão de $P_1(x) = x^4 + ax^2 + b$ por $P_2(x) = x^2 + 2x + 4$ é exata, e que a divisão de $P_3(x) = x^3 + cx^2 + dx + 3$ por $P_4(x) = x^2 + x + 2$ tem resto igual a 5 , determine o valor de $a + b + c + d$.

Questão 26. Sejam $a; b; c$ e d números reais não-nulos. Exprima o valor do determinante da matriz

$$\begin{vmatrix} 2 & bcd & 1 & a & a^2 & 3 \\ 6 & acd & 1 & b & b^2 & 7 \\ 4 & abd & 1 & c & c^2 & 5 \\ abc & 1 & d & d^2 & & \end{vmatrix}$$

na forma de um produto de números reais.

Questão 27. Encontre todos os valores de $a \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ para os quais a equação na variável real x ,

$$\arctg \sqrt{1 + \frac{e^x}{2}} + \arctg \sqrt{1 - \frac{e^x}{2}} = a;$$

admite solução.

Questão 28. Sabe-se que uma elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tangencia internamente a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$ e que a reta de equação $3x + 2y = 6$ é tangente à elipse no ponto P . Determine as coordenadas de P .

Questão 29. Considere um quadrado $ABCD$. Sejam E o ponto médio do segmento \overline{CD} e F um ponto sobre o segmento \overline{CE} tal que $m_{\angle BC} + m_{\angle CF} = m_{\angle AF}$. Prove que $\cos \alpha = \cos 2\beta$, sendo os ângulos $\alpha = \angle BAF$ e $\beta = \angle EAD$.

Questão 30. Quatro esferas de mesmo raio $R > 0$ são tangentes externamente duas a duas, de forma que seus centros formam um tetraedro regular com arestas de comprimento $2R$. Determine, em função de R , a expressão do volume do tetraedro circunscrito às quatro esferas.

