

NOTAÇÕES

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	\mathbb{C} : conjunto dos números complexos
\mathbb{R} : conjunto dos números reais	i : unidade imaginária: $i^2 = -1$
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$	$ z $: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$	\bar{z} : conjugado do número $z \in \mathbb{C}$
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$	$M_{m \times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m \times n$
$A \setminus B = \{x; x \in A \text{ e } x \notin B\}$	$\det A$: determinante da matriz A
$\sum_{n=1}^k a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k, k \in \mathbb{N}$	A^t : transposta da matriz A
$\sum_{n=0}^k a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k, k \in \mathbb{N}$	A^{-1} : inversa da matriz inversível A
$\mathcal{P}(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A	
$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A	
$\text{Arg } z$: argumento principal de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\text{Arg } z \in [0, 2\pi[$	
$f \circ g$: função composta das funções f e g	
$f \cdot g$: produto das funções f e g	

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 1. Considere as afirmações abaixo relativas a conjuntos A , B e C quaisquer:

- I. A negação de $x \in A \cap B$ é: $x \notin A$ ou $x \notin B$.
- II. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- III. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Destas, é (são) falsa(s)

- A () apenas I. B () apenas II. C () apenas III.
D () apenas I e III. E () nenhuma.

Questão 2. Considere conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ e $C \subset (A \cup B)$. Se $A \cup B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ são os domínios das funções reais definidas por $\ln(x - \sqrt{\pi})$, $\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$ e $\sqrt{\frac{x - \pi}{5 - x}}$, respectivamente, pode-se afirmar que

- A () $C =]\sqrt{\pi}, 5[$. B () $C = [2, \pi]$. C () $C = [2, 5[$.
D () $C = [\pi, 4]$. E () C não é intervalo.

Questão 3. Se z é uma solução da equação em \mathbb{C} ,

$$z - \bar{z} + |z|^2 = - \left[(\sqrt{2} + i) \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{3} - i \frac{\sqrt{2} + 1}{3} \right) \right]^{12},$$

pode-se afirmar que

- A () $i(z - \bar{z}) < 0$. B () $i(z - \bar{z}) > 0$. C () $|z| \in [5, 6]$.
D () $|z| \in [6, 7]$. E () $\left| z + \frac{1}{\bar{z}} \right| > 8$.

Questão 4. Os argumentos principais das soluções da equação em z ,

$$iz + 3\bar{z} + (z + \bar{z})^2 - i = 0,$$

pertencem a

A () $\left] \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right[.$

B () $\left] \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right[.$

C () $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[.$

D () $\left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right[.$

E () $\left] 0, \frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right[.$

Questão 5. Considere a progressão aritmética $(a_1, a_2, \dots, a_{50})$ de razão d . Se $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$ e

$\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$, então $d - a_1$ é igual a

A () 3.

B () 6.

C () 9.

D () 11.

E () 14.

Questão 6. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que f é par e g é ímpar. Das seguintes afirmações:

I. $f \cdot g$ é ímpar,

II. $f \circ g$ é par,

III. $g \circ f$ é ímpar,

é (são) verdadeira(s)

A () apenas I.

B () apenas II.

C () apenas III.

D () apenas I e II.

E () todas.

Questão 7. A equação em x ,

$$\arctg(e^x + 2) - \operatorname{arccotg}\left(\frac{e^x}{e^{2x} - 1}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

A () admite infinitas soluções, todas positivas.

B () admite uma única solução, e esta é positiva.

C () admite três soluções que se encontram no intervalo $\left] -\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right[.$

D () admite apenas soluções negativas.

E () não admite solução.

Questão 8. Sabe-se que o polinômio $p(x) = x^5 - ax^3 + ax^2 - 1$, $a \in \mathbb{R}$, admite a raiz $-i$. Considere as seguintes afirmações sobre as raízes de p :

I. Quatro das raízes são imaginárias puras.

II. Uma das raízes tem multiplicidade dois.

III. Apenas uma das raízes é real.

Destas, é (são) verdadeira(s) apenas

A () I.

B () II.

C () III.

D () I e III.

E () II e III.

Questão 9. Um polinômio real $p(x) = \sum_{n=0}^5 a_n x^n$, com $a_5 = 4$, tem três raízes reais distintas, a , b e c , que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ a + 4b + 2c = 6 \\ 2a + 2b + 2c = 5 \end{cases}.$$

Sabendo que a maior das raízes é simples e as demais têm multiplicidade dois, pode-se afirmar que $p(1)$ é igual a

- A () -4. B () -2. C () 2. D () 4. E () 6.

Questão 10. Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^{15} a_n x^n$ com coeficientes $a_0 = -1$ e $a_n = 1 + i a_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots, 15$. Das afirmações:

- I. $p(-1) \notin \mathbb{R}$,
 II. $|p(x)| \leq 4(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$, $\forall x \in [-1, 1]$,
 III. $a_8 = a_4$,

é (são) verdadeira(s) apenas

- A () I. B () II. C () III. D () I e II. E () II e III.

Questão 11. A expressão $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5$ é igual a

- A () $2630\sqrt{5}$. B () $2690\sqrt{5}$. C () $2712\sqrt{5}$.
 D () $1584\sqrt{15}$. E () $1604\sqrt{15}$.

Questão 12. Um palco possui 6 refletores de iluminação. Num certo instante de um espetáculo moderno os refletores são acionados aleatoriamente de modo que, para cada um dos refletores, seja de $\frac{2}{3}$ a probabilidade de ser aceso. Então, a probabilidade de que, neste instante, 4 ou 5 refletores sejam acesos simultaneamente, é igual a

- A () $\frac{16}{27}$. B () $\frac{49}{81}$. C () $\frac{151}{243}$. D () $\frac{479}{729}$. E () $\frac{2^4}{3^4} + \frac{2^5}{3^5}$.

Questão 13. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}),$$

em que $a_4 = 10$, $\det A = -1000$ e a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $d > 0$. Pode-se afirmar que $\frac{a_1}{d}$ é igual a

- A () -4. B () -3. C () -2. D () -1. E () 1.

Questão 14. Sobre os elementos da matriz

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

sabe-se que (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4) são duas progressões geométricas de razão 3 e 4 e de soma 80 e 255, respectivamente. Então, $\det(A^{-1})$ e o elemento $(A^{-1})_{23}$ valem, respectivamente,

A () $\frac{1}{72}$ e 12. B () $-\frac{1}{72}$ e -12. C () $-\frac{1}{72}$ e 12. D () $-\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$. E () $\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$.

Questão 15. O valor da soma $\sum_{n=1}^6 \operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, é igual a

A () $\frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos \alpha \right]$. B () $\frac{1}{2} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{729}\right) \right]$.
C () $\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)$. D () $\frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{243}\right) \right]$.
E () $\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos \alpha$.

Questão 16. Se os números reais α e β , com $\alpha + \beta = \frac{4\pi}{3}$, $0 \leq \alpha \leq \beta$, maximizam a soma $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta$, então α é igual a

A () $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. B () $\frac{2\pi}{3}$. C () $\frac{3\pi}{5}$. D () $\frac{5\pi}{8}$. E () $\frac{7\pi}{12}$.

Questão 17. Considere as circunferências $C_1 : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$ e $C_2 : (x-10)^2 + (y-11)^2 = 9$. Seja r uma reta tangente interna a C_1 e C_2 , isto é, r tangencia C_1 e C_2 e intercepta o segmento de reta $\overline{O_1O_2}$ definido pelos centros O_1 de C_1 e O_2 de C_2 . Os pontos de tangência definem um segmento sobre r que mede

A () $5\sqrt{3}$. B () $4\sqrt{5}$. C () $3\sqrt{6}$. D () $\frac{25}{3}$. E () 9.

Questão 18. Um cilindro reto de altura $\frac{\sqrt{6}}{3}$ cm está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3 cm, o volume do cilindro, em cm^3 , é igual a

A () $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$. B () $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. C () $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$. D () $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$. E () $\frac{\pi}{3}$.

Questão 19. Um triângulo equilátero tem os vértices nos pontos A , B e C do plano xOy , sendo $B = (2, 1)$ e $C = (5, 5)$. Das seguintes afirmações:

- I. A se encontra sobre a reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$,
II. A está na intersecção da reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$ com a circunferência $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$,
III. A pertence às circunferências $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ e $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = \frac{75}{4}$,

é (são) verdadeira(s) apenas

- A () I. B () II. C () III. D () I e II. E () II e III.

Questão 20. Sejam A , B , C e D os vértices de um tetraedro regular cujas arestas medem 1 cm . Se M é o ponto médio do segmento \overline{AB} e N é o ponto médio do segmento \overline{CD} , então a área do triângulo MND , em cm^2 , é igual a

- A () $\frac{\sqrt{2}}{6}$. B () $\frac{\sqrt{2}}{8}$. C () $\frac{\sqrt{3}}{6}$. D () $\frac{\sqrt{3}}{8}$. E () $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21. Sejam A , B e C conjuntos tais que $C \subset B$, $n(B \setminus C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B)$, $n(A \cup B) = 22$ e $(n(C), n(A), n(B))$ é uma progressão geométrica de razão $r > 0$.

a) Determine $n(C)$.

b) Determine $n(\mathcal{P}(B \setminus C))$.

Questão 22. A progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ tem razão $r < 0$. Sabe-se que a progressão infinita $(a_1, a_6, \dots, a_{5n+1}, \dots)$ tem soma 8 e a progressão infinita $(a_5, a_{10}, \dots, a_{5n}, \dots)$ tem soma 2. Determine a soma da progressão infinita $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

Questão 23. Analise se a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$ é bijetora e, em caso afirmativo, determine a função inversa f^{-1} .

Questão 24. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijetora e ímpar. Mostre que a função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ também é ímpar.

Questão 25. Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^6 a_n x^n$, com coeficientes reais, sendo $a_0 \neq 0$ e $a_6 = 1$. Sabe-se que se r é raiz de p , $-r$ também é raiz de p . Analise a veracidade ou falsidade das afirmações:

- I. Se r_1 e r_2 , $|r_1| \neq |r_2|$, são raízes reais e r_3 é raiz não real de p , então r_3 é imaginário puro.
II. Se r é raiz dupla de p , então r é real ou imaginário puro.
III. $a_0 < 0$.

Questão 26. Uma urna de sorteio contém 90 bolas numeradas de 1 a 90, sendo que a retirada de uma bola é equiprovável à retirada de cada uma das demais.

- Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna. Calcule a probabilidade de o número desta bola ser um múltiplo de 5 ou de 6.
- Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna e, sem repô-la, retira-se uma segunda bola. Calcule a probabilidade de o número da segunda bola retirada não ser um múltiplo de 6.

Questão 27. Considere as matrizes $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ e $X, B \in M_{4 \times 1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

- Encontre todos os valores reais de a e b tais que a equação matricial $AX = B$ tenha solução única.
- Se $a^2 - b^2 = 0$, $a \neq 0$ e $B = [1 \ 1 \ 2 \ 4]^t$, encontre X tal que $AX = B$.

Questão 28. Considere a equação $(3 - 2 \cos^2 x) \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) - 6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$.

- Determine todas as soluções x no intervalo $[0, \pi[$.
- Para as soluções encontradas em $a)$, determine $\operatorname{cotg} x$.

Questão 29. Determine uma equação da circunferência inscrita no triângulo cujos vértices são $A = (1, 1)$, $B = (1, 7)$ e $C = (5, 4)$ no plano xOy .

Questão 30. As superfícies de duas esferas se interceptam ortogonalmente (isto é, em cada ponto da intersecção os respectivos planos tangentes são perpendiculares). Sabendo que os raios destas esferas medem 2 cm e $\frac{3}{2} \text{ cm}$, respectivamente, calcule

- a distância entre os centros das duas esferas.
- a área da superfície do sólido obtido pela intersecção das duas esferas.