SIMULADO DE VESTIBULAR

GRAVITAÇÃO

1.(ITA/1ª FASE/2020)

Um satélite artificial viaja em direção a um planeta ao longo de uma trajetória parabólica. A uma distância d desse corpo celeste, propulsores são acionados de modo a, a partir daquele instante, mudar o módulo da velocidade do satélite de v_p para v_e e também a sua trajetória, que passa a ser elíptica em torno do planeta, com semieixo maior a. Sendo a massa do satélite desproporcionalmente menor que a do planeta, a razão v_e/v_p é dada por

A ( ) $\sqrt{\frac{d}{a}-\frac{1}{2}}$.

B ( ) $\sqrt{\frac{d}{2a}}$.

C ( ) $\sqrt{1-\frac{d}{2a}}$.

D ( ) $\sqrt{1+\frac{d}{2a}}$.

E ( ) $\sqrt{1-\frac{d}{a}}$.

2.(ITA/2ª FASE/2020)

Um planeta esférico de massa M e raio R gira com velocidade angular constante ao redor de seu eixo norte-sul. De um ponto de sua linha equatorial é lançado um satélite artificial de massa $m \ll M$ sob ação de seus propulsores, que realizam um trabalho W. Em consequência, o satélite passa a descrever uma órbita elíptica em torno do planeta, com semieixo maior $2R$. Calcule:

(a) A excentricidade máxima da órbita do satélite para que este complete uma volta ao redor do planeta.

(b) O período de rotação do planeta, levando em conta as grandezas intervenientes, inclusive a constante universal da gravitação G.

3.(ITA/1ª FASE/2019)

Considere um corpo celeste esférico e homogêneo de massa M e raio R atravessado de polo a polo por um túnel cilíndrico retilíneo de diâmetro desprezível. Em um desses polos um objeto pontual é solto a partir do repouso no instante $t = 0$. Sendo G a constante universal de gravitação, esse objeto vai alcançar o outro polo após o intervalo de tempo dado por

A ( ) $\left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2}$.

B ( ) $\pi\left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2}$.

C ( ) $\left(\frac{4R^3}{3GM}\right)^{1/2}$.

D ( ) $2\pi\left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2}$.

E ( ) $2\pi\left(\frac{4R^3}{3GM}\right)^{1/2}$.

4.(ITA/2ª FASE/2019)

Uma estação espacial, Kepler, estuda um exoplaneta cujo satélite natural tem órbita elíptica de semieixo maior a_0 e período T_0, sendo $d = 32a_0$ a distância entre a estação e o exoplaneta. Um objeto que se desprende de Kepler é atraído gravitacionalmente pelo exoplaneta e inicia um movimento de queda livre a partir do repouso em relação a este. Desprezando a rotação do exoplaneta, a interação gravitacional entre o satélite e o objeto, bem como as dimensões de todos os corpos envolvidos, calcule em função de T_0 o tempo de queda do objeto.

5.(ITA/2018)

Uma massa m de carga q gira em órbita circular de raio R e período T no plano equatorial de um ímã. Nesse plano, a uma distância r do ímã, a intensidade do campo magnético é $B(r) = \mu/r^3$, em que μ é uma constante. Se fosse de $4R$ o raio dessa órbita, o período seria de

a) T/2. **b)** 2T. **c)** 8T. **d)** 32T. **e)** 64T.

6.(ITA/2018)

Quatro corpos pontuais, cada qual de massa m, atraem-se mutuamente devido à interação gravitacional. Tais corpos encontram-se nos vértices de um quadrado de lado L girando em torno do seu centro com velocidade angular constante. Sendo G a constante de gravitação universal, o período dessa rotação é dado por

a) $2\pi\sqrt{\dfrac{L^3}{Gm}\left(\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}\right)}$

b) $\dfrac{4\pi}{3}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}\,L^3}{3Gm}}$

c) $\sqrt{\dfrac{L^3}{Gm}\left(\dfrac{4+\sqrt{2}}{7}\right)}$

d) $2\pi\sqrt{\dfrac{L^3}{Gm}\left(\dfrac{4-\sqrt{2}}{7}\right)}$

e) $\sqrt{\dfrac{L^3}{Gm}\left(\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}\right)}$

7.(ITA/2018)

Seja um cometa numa órbita elíptica com as distâncias do afélio, r_a, e periélio, r_p. Com o Sol num dos focos como origem de um sistema de coordenadas polares, a equação que descreve o módulo do vetor posição r em função do ângulo θ medido a partir do periélio é $r(\theta) = \alpha/(1 + \varepsilon \cos\theta)$, em que α e ε são constantes, sendo $0 < \varepsilon < 1$. Expresse a excentricidade ε, a constante α e o período da órbita em função de r_a e r_p.

8.(ITA/2017)

Com os motores desligados, uma nave executa uma trajetória circular com período de 5 400 s próxima à superfície do planeta em que orbita. Assinale a massa específica média desse planeta.

a) $1,0\ g/cm^3$ b) $1,8\ g/cm^3$ c) $2,4\ g/cm^3$ d) $4,8\ g/cm^3$ e) $20,0\ g/cm^3$

9.(ITA/2017)

Suponha que a atmosfera de Vênus seja composta dos gases CO_2, N_2, Ar, Ne e He, em equilíbrio térmico a uma temperatura $T = 735$ K. **a)** Determine a razão entre a velocidade quadrática média das moléculas de cada gás e a velocidade de escape nesse planeta. **b)** Que conclusão pode ser obtida sobre a provável concentração desses gases nessa atmosfera? Obs.: Considere Vênus com o raio igual ao da Terra e a massa igual a 0,810 vezes a desta.

10.(ITA/2016)

Considere duas estrelas de um sistema binário em que cada qual descreve uma órbita circular em torno do centro de massa comum. Sobre tal sistema são feitas as seguintes afirmações:

I. O período de revolução é o mesmo para as duas estrelas.

II. Esse período é função apenas da constante gravitacional, da massa total do sistema e da distância entre ambas as estrelas.

III. Sendo $\boldsymbol{R}_1$ e $\boldsymbol{R}_2$ os vetores posição que unem o centro e massa dos sitema aos respectivos centros de massa das estrelas, tanto $\boldsymbol{R}_1$ como $\boldsymbol{R}_2$ varrem áreas de mesma magnitude num mesmo intervalo de tempo.

Assinale a alternativa correta.

a) Apenas a afirmação I é verdadeira.

b) Apenas a afirmação II é verdadeira.

c) Apenas a afirmação III é verdadeira.

d) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.

e) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.

11.(ITA/2015)

Assinale a alternativa **incorreta** dentre as seguintes proposições a respeito de campos gravitacionais de corpos homogêneos de diferentes formatos geométricos:

a) Num cubo, a linha de ação do campo gravitacional num dos vértices tem a direção da diagonal principal que parte desse vértice.

b) Numa chapa quadrada de lado ℓ e vazada no centro por um orifício circular de raio $a < \ell/2$, em qualquer ponto dos seus eixos de simetria a linha de ação do campo gravitacional é normal ao plano da chapa.

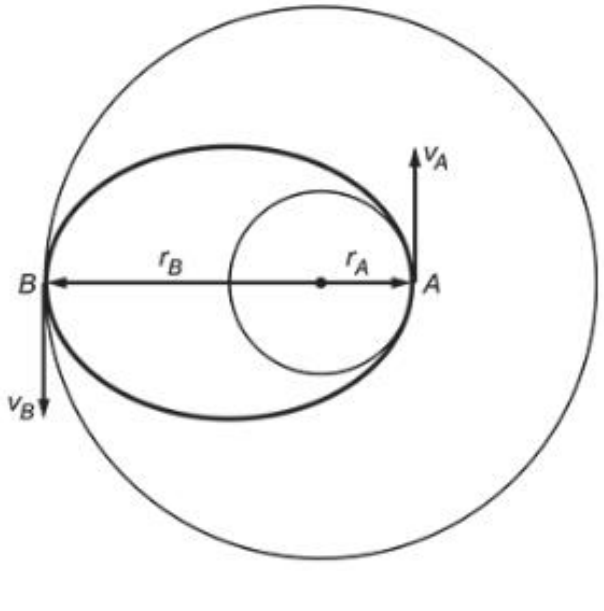
c) Num corpo hemisférico, há pontos em que as linhas de ação do campo gravitacional passam pelo centro da sua base circular e outros pontos em que isto não acontece.

d) Num toro, há pontos em que o campo gravitacional é não nulo e normal à sua superfície.

e) Num tetraedro regular, a linha de ação do campo gravitacional em qualquer vértice é normal à face oposta ao mesmo.

12.(ITA/2015)

Uma nave espacial segue inicialmente uma trajetória circular de raio r_A em torno da Terra. Para que a nave percorra uma nova órbita também circular, de raio $r_B > r_A$, é necessário por razões de economia fazer com que ela percorra antes uma trajetória semieliptica, denominada órbita de transferência de Hohmann, mostrada na figura. Para tanto, são fornecidos à nave dois impulsos, a saber: no ponto A, ao iniciar sua órbita de transferência, e no ponto B, ao iniciar sua outra órbita circular. Sendo M a massa da Terra; G, a constante da gravitação universal; m e v, respectivamente, a massa e a velocidade da nave; e constante a grandeza mrv na órbita eliptica, pede-se a energia necessária para a transferência de órbita da nave no ponto B.



13.(ITA/2014)

Considere dois satélites artificiais S e T em torno da Terra. S descreve uma órbita elíptica com semieixo maior a, e T, uma órbita circular de raio a, com os respectivos vetores posição $\vec{r}_S$ e $\vec{r}_T$ com origem no centro da Terra. É correto afirmar que

a) para o mesmo intervalo de tempo, a área varrida por $\vec{r}_S$ é igual à varrida por $\vec{r}_T$.

b) para o mesmo intervalo de tempo, a área varrida por $\vec{r}_S$ é maior que a varrida por $\vec{r}_T$.

c) o período de translação de S é igual ao de T.

d) o período de translação de S é maior que o de T.

e) se S e T têm a mesma massa, então a energia mecânica de S é maior que a de T.

14.(ITA/2013)

Uma lua de massa m de um planeta distante, de massa $M \gg m$, descreve uma órbita elíptica com semieixo maior a e semieixo menor b perfazendo um sistema de energia E. A lei das áreas de Kepler relaciona a velocidade v da lua no apogeu com sua velocidade v' no perigeu, isto é, $v'(a - e) = v(a + e)$, em que e é a medida do centro ao foco da elipse. Nessas condições, podemos afirmar que

a) $E = -GMm/(2a)$.

b) $E = -GMm/(2b)$.

c) $E = -GMm/(2e)$.

d) $E = -GMm/\sqrt{a^2 + b^2}$

e) $v' = \sqrt{2GM/(a-e)}$.

15.(ITA/2012)

Acredita-se que a colisão de um grande asteroide com a Terra tenha causado a extinção dos dinossauros. Para se ter uma ideia de um impacto dessa ordem, considere um asteroide esférico de ferro, com 2 km de diâmetro, que se encontra em repouso quase no infinito, estando sujeito somente à ação da gravidade terrestre. Desprezando as forças de atrito atmosférico, assinale a opção que expressa a energia liberada no impacto, medida em número aproximado de bombas de hidrogênio de 10 megatons de TNT.

a) 1 b) 10 c) 500
d) 50.000 e) 1.000.000

16.(ITA/2012)

Boa parte das estrelas do Universo formam sistemas binários nos quais duas estrelas giram em torno do centro de massa comum, CM. Considere duas estrelas esféricas de um sistema binário em que cada qual descreve uma órbita circular em torno desse centro. Sobre tal sistema são feitas duas afirmações:

I. O período de revolução é o mesmo para as duas estrelas e depende apenas da distância entre elas, da massa total deste binário e da constante gravitacional.

II. Considere que $\vec{R}_1$ e $\vec{R}_2$ são os vetores que ligam o CM ao respectivo centro de cada estrela. Num certo intervalo de tempo Δt, o raio vetor $\vec{R}_1$ varre uma certa área A. Durante este mesmo intervalo de tempo, o raio vetor $\vec{R}_2$ também varre uma área igual a A.

Diante destas duas proposições, assinale a alternativa correta.

a) As afirmações I e II são falsas.
b) Apenas a afirmação I é verdadeira.
c) Apenas a afirmação II é verdadeira.
d) As afirmações I e II são verdadeiras, mas a II não justifica a I.
e) As afirmações I e II são verdadeiras e, além disso, a II justifica a I.

17.(ITA/2011)

Na ficção científica *A Estrela*, de H.G. Wells, um grande asteroide passa próximo à Terra que, em consequência, fica com sua nova órbita mais próxima do Sol e tem seu ciclo lunar alterado para 80 dias. Pode-se concluir que, após o fenômeno, o ano terrestre e a distância Terra-Lua vão tornar-se, respectivamente,

a) mais curto – aproximadamente a metade do que era antes.
b) mais curto – aproximadamente duas vezes o que era antes.
c) mais curto – aproximadamente quatro vezes o que era antes.
d) mais longo – aproximadamente a metade do que era antes.
e) mais longo – aproximadamente um quarto do que era antes.

18.(ITA/2010)

Considere um segmento de reta que liga o centro de qualquer planeta do sistema solar ao centro do Sol. De acordo com a 2ª Lei de Kepler, tal segmento percorre áreas iguais em tempos iguais. Considere, então, que em dado instante deixasse de existir o efeito da gravitação entre o Sol e o planeta. Assinale a alternativa correta.

a) O segmento de reta em questão continuaria a percorrer áreas iguais em tempos iguais.
b) A órbita do planeta continuaria a ser elíptica, porém com focos diferentes e a 2ª Lei de Kepler continuaria válida.
c) A órbita do planeta deixaria de ser elíptica e a 2ª Lei de Kepler não seria mais válida.
d) A 2ª Lei de Kepler só é válida quando se considera uma força que depende do inverso do quadrado das distâncias entre os corpos e, portanto, deixaria de ser válida.
e) O planeta iria se dirigir em direção ao Sol.

19.(ITA/2010)

A temperatura para a qual a velocidade associada à energia cinética média de uma molécula de nitrogênio, N_2, é igual à velocidade de escape desta molécula da superfície da Terra é de, aproximadamente,

a) $1,4 \times 10^5$ K.

b) $1,4 \times 10^8$ K.

c) $7,0 \times 10^{27}$ K.

d) $7,2 \times 10^4$ K.

e) $8,4 \times 10^{28}$ K.

20.(ITA/2010)

Derive a 3ª Lei de Kepler do movimento planetário a partir da Lei da Gravitação Universal de Newton considerando órbitas circulares.

21.(ITA/2009)

Desde os idos de 1930, observações astronômicas indicam a existência da chamada matéria escura. Tal matéria não emite luz, mas a sua presença é inferida pela influência gravitacional que ela exerce sobre o movimento de estrelas no interior de galáxias. Suponha que, numa galáxia, possa ser removida sua matéria escura de massa específica $\rho > 0$, que se encontra uniformemente distribuída. Suponha também que no centro dessa galáxia haja um buraco negro de massa M, em volta do qual uma estrela de massa m descreve uma órbita circular. Considerando órbitas de mesmo raio na presença e na ausência de matéria escura, a respeito da força gravitacional resultante $\vec{F}$ exercida sobre a estrela e seu efeito sobre o movimento desta, pode-se afirmar que

a) $\vec{F}$ é atrativa e a velocidade orbital de m não se altera na presença da matéria escura.

b) $\vec{F}$ é atrativa e a velocidade orbital de m é menor na presença da matéria escura.

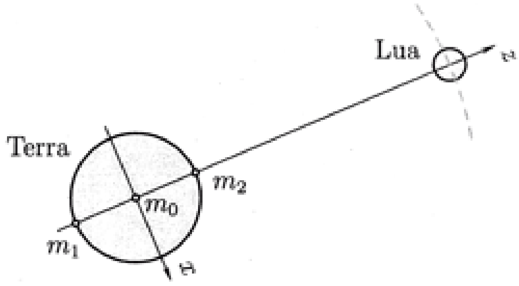
c) $\vec{F}$ é atrativa e a velocidade orbital de m é maior na presença da matéria escura.

d) $\vec{F}$ é repulsiva e a velocidade orbital de m é maior na presença da matéria escura.

e) $\vec{F}$ é repulsiva e a velocidade orbital de m é menor na presença da matéria escura.

22.(ITA/2009)

Lua e Sol são os principais responsáveis pelas forças de maré. Estas são produzidas devido às diferenças na aceleração gravitacional sofrida por massas distribuídas na Terra em razão das respectivas diferenças de suas distâncias em relação a esses astros. A figura mostra duas massas iguais, $m_1 = m_2 = m$, dispostas sobre a superfície da Terra em posições diametralmente opostas e alinhadas em relação à Lua, bem como uma massa $m_0 = m$ situada no centro da Terra. Considere G a constante de gravitação universal, M a massa da Lua, r o raio da Terra e R a distância entre os centros da Terra e da Lua. Considere, também, f_{0z}, f_{1z} e f_{2z} as forças produzidas pela Lua respectivamente sobre as massas m_0, m_1 e m_2. Determine as diferenças $(f_{1z} - f_{0z})$ e $(f_{2z} - f_{0z})$ sabendo que deverá usar a aproximação $\frac{1}{(1+x)^\alpha} = 1 - \alpha x$, quando $x << 1$.



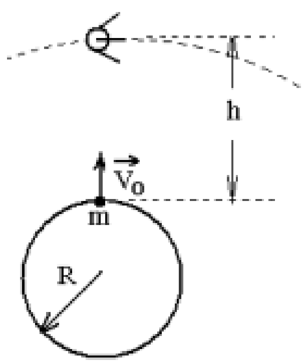
23.(ITA/2008)

A estrela anã vermelha Gliese 581 possui um planeta que, num período de 13 dias terrestres, realiza em torno da estrela uma órbita circular, cujo raio é igual a 1/14 da distância média entre o Sol e a Terra. Sabendo que a massa do planeta é aproximadamente igual à da Terra, pode-se dizer que a razão entre as massas da Gliese 581 e do nosso Sol é de aproximadamente

a) 0,05 **b)** 0,1 **c)** 0,6 **d)** 0,3 **e)** 4,0

24.(ITA/2007)

Lançado verticalmente da Terra com velocidade inicial V_0, um parafuso de massa m chega com velocidade nula na órbita de um satélite artificial, geoestacionário em relação à Terra, que se situa na mesma vertical. Desprezando a resistência do ar, determine a velocidade V_0 em função da aceleração da gravidade g na superfície da Terra, raio da Terra R e altura h do satélite.



25.(ITA/2005)

Satélite síncrono é aquele que tem sua órbita no plano do equador de um planeta, mantendo-se estacionário em relação a este. Considere um satélite síncrono em órbita de Júpiter cuja massa é $M_J = 1,9 \times 10^{27}$ kg e cujo raio é $R_J = 7,0 \times 10^7$ m. Sendo a constante da gravitação universal $G = 6,7 \times 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$ e considerando que o dia de Júpiter é de aproximadamente 10 h, determine a altitude do satélite em relação à superfície desse planeta.

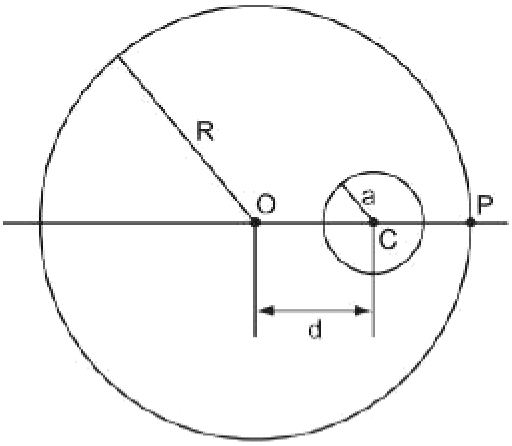
26.(ITA/2004)

Uma estrela mantém presos, por meio de sua atração gravitacional, os planetas Alfa, Beta e Gama. Todos descrevem órbitas elípticas, em cujo foco comum se encontra a estrela, conforme a primeira lei de Kepler. Sabe-se que o semi-eixo maior da órbita de Beta é o dobro daquele da órbita de Gama. Sabe-se também que o período de Alfa é $\sqrt{2}$ vezes maior que o período de Beta. Nestas condições, pode-se afirmar que a razão entre o período de Alfa e o de Gama é

a) $\sqrt{2}$. b) 2. c) 4. d) $4\sqrt{2}$. e) $6\sqrt{2}$.

27.(ITA/2003)

Variações no campo gravitacional na superfície da Terra podem advir de irregularidades na distribuição de sua massa. Considere a Terra como uma esfera de raio **R** e de densidade ρ, uniforme, com uma cavidade esférica de raio **a**, inteiramente contida no seu interior. A distância entre os centros **O**, da Terra, e **C**, da cavidade, é **d**, que pode variar de 0 (zero) até **R – a**, causando, assim, uma variação do campo gravitacional em um ponto **P**, sobre a superfície da Terra, alinhado com **O** e **C**. (Veja a figura). Seja G_1 a intensidade do campo gravitacional em **P** sem a existência da cavidade na Terra, e G_2 , a intensidade do campo no mesmo ponto, considerando a existência da cavidade. Então, o valor máximo da variação relativa: $(G_1 - G_2)/G_1$, que se obtém ao deslocar a posição da cavidade, é



a) $a^3/[(R - a)^2 R]$.

b) $(a/R)^3$.

c) $(a/R)^2$.

d) a/R.

e) nulo.

RESOLUÇÃO

1.(ITA/1ª FASE/2020)

LETRA: C

Considerando que o planeta tem massa M, no caso de uma órbita parabólica, a velocidade v_p do satélite a uma distância d será a velocidade de escape do satélite.

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM}{d}}$$

Para uma órbita elíptica, a velocidade v_e do satélite é obtida através da energia mecânica nessa trajetória. Se o satélite possui massa m, obtemos:

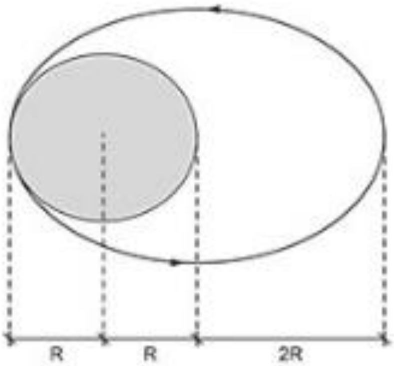
$$E_M = -\frac{GM\cancel{m}}{2a} = \frac{\cancel{m}v_e^2}{2} - \frac{GM\cancel{m}}{d} \Rightarrow v_e = \sqrt{GM\left(\frac{2}{d} - \frac{1}{a}\right)}$$

Desta forma, a razão entre as velocidades será:

$$\frac{v_e}{v_p} = \frac{\sqrt{\cancel{GM}\left(\frac{2}{d} - \frac{1}{a}\right)}}{\sqrt{\frac{2\cancel{GM}}{d}}} = \sqrt{\frac{d}{2}\left(\frac{2}{d} - \frac{1}{a}\right)} \Rightarrow \boxed{\frac{v_e}{v_p} = \sqrt{1 - \frac{d}{2a}}}$$

2.(ITA/2ª FASE/2020)

a) A excentricidade máxima dessa órbita será obtida se o satélite for lançado do periastro. Considerando que o periastro seja o raio do planeta, temos a seguinte órbita:



Assim, conclui-se que a distância focal da órbita será R e, da definição de excentricidade (e), temos que:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\cancel{R}}{2\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{e = \frac{1}{2}}$$

b) Para que o satélite efetue a órbita elíptica, é necessário que o propulsor realize um trabalho W tal que o satélite adquira velocidade suficiente para sair da órbita circular. Considerando que a velocidade inicial v_0 do satélite seja igual à velocidade de rotação do planeta, temos que:

$$v_0 = \frac{2\pi R}{T} \qquad (1)$$

sendo T o período de rotação do planeta.
A velocidade final v_f do satélite será equivalente à velocidade do periastro. Do Princípio da Conservação da Energia e considerando que a energia mecânica (E_m) numa órbita elíptica seja $\frac{-GMm}{2a}$, onde a é o semieixo maior, conclui-se que:

$$E_m = E_p + E_c \Rightarrow \frac{-GM\cancel{m}}{2a} = \frac{-GM\cancel{m}}{r} - \frac{\cancel{m}v_f^2}{2} \Rightarrow v_f = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

Nesse caso, a = 2R e R = r. Assim, para o satélite, temos que:

$$v_f = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{2R}\right)} \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{3GM}{2R}} \qquad (2)$$

Considerando que o trabalho realizado seja convertido em energia cinética, obtém-se:

$$W = \Delta E_c = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Aplicando (1) e (2):

$$W = \frac{m}{2}\left[\left(\sqrt{\frac{3GM}{2R}}\right)^2 - \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2\right] \Rightarrow \frac{2W}{m} = \frac{3GM}{2R} - \frac{4\pi^2R^2}{T^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2R^2}{\left(\frac{3GM}{2R} - \frac{2W}{m}\right)} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{3GM}{2R} - \frac{2W}{m}}}}$$

3.(ITA/1ª FASE/2019)

LETRA: B

Ao abandonarmos o objeto pontual em uma das extremidades do túnel cilíndrico, ele realizará um movimento harmônico simples de período equivalente ao de um corpo de massa m em órbita circular rasante em torno do corpo celeste de massa M. Portanto, o período do movimento é dado por:

$$R_{cp} = F_G \Rightarrow \cancel{m}\omega^2 R = \frac{GM\cancel{m}}{R^2} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2}R = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow T = 2\pi\left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2}$$

Logo, o tempo t para que o objeto pontual vá de polo a polo será:

$$t = \frac{T}{2} \Rightarrow \boxed{t = \pi\left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2}}$$

4.(ITA/2ª FASE/2019)

Sendo t o tempo de queda e considerando que o objeto descreve uma órbita elíptica, os parâmetros T (período orbital) e a (semieixo maior da órbita) serão dados por:

$$T = 2t \text{ e } a = \frac{d}{2} = \frac{32a_0}{2} \Rightarrow a = 16a_0$$

Nesse caso, o periastro dessa órbita é muito menor do que o apoastro. A partir dos dados do satélite e da Terceira Lei de Kepler, o tempo de queda do objeto é:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{a_0^3} \Rightarrow \frac{(2t)^2}{(16\cancel{a_0})^3} = \frac{T_0^2}{\cancel{a_0^3}} \Rightarrow \boxed{t = 32T_0}$$

5.(ITA/1ª FASE/2018)

LETRA: E

Admitindo que nessa região atua apenas o campo magnético produzido pelo ímã, da equação fornecida no enunciado, o período do MCU descrito pela partícula é dado por:

$$\left|\begin{array}{l} T = \dfrac{2\cdot\pi\cdot m}{|q|\cdot B} \\ B = \dfrac{\mu}{r^3} \end{array}\right. \Rightarrow T = \frac{2\cdot\pi\cdot m}{|q|\cdot\mu}\cdot r^3$$

Assim, se o raio da órbita fosse 4R, o novo período (T') seria de:

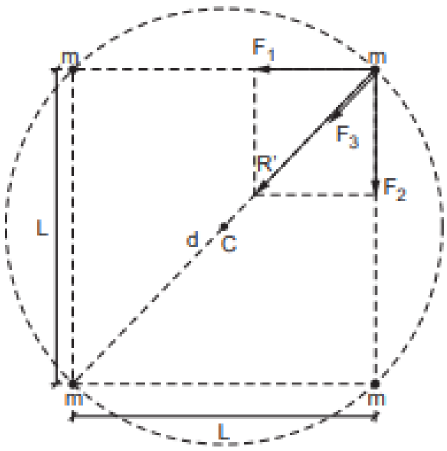
$$\frac{T'}{T} = \frac{2\cdot\pi\cdot m\cdot(4R)^3}{|q|\cdot\mu}\cdot\frac{|q|\cdot\mu}{2\cdot\pi\cdot m\cdot R^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T' = 64T}$$

6.(ITA/1ª FASE/2018)

LETRA: D

Esquematicamente, temos:



Como F_1 e F_2 possuem mesmo módulo, a resultante R' dessas forças possui a mesma direção da diagonal do quadrado e de F_3.

Logo a intensidade da resultante R das forças gravitacionais é dada por:

$$\left| \begin{array}{l} R = R' + F_3 \\ R' = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \\ F_1 = F_2 = \dfrac{Gm^2}{L^2} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{\left(\frac{Gm^2}{L^2}\right)^2 + \left(\frac{Gm^2}{L^2}\right)^2} + \frac{Gm^2}{d^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = Gm^2\left(\frac{\sqrt{2}}{L^2} + \frac{1}{(\sqrt{L^2 + L^2})^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{Gm^2}{L^2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)$$

Como a resultante R atua como resultante centrípeta, temos:

$$R = R_{cp} = m\omega^2 R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Gm^{\cancel{2}}}{L^2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) = \cancel{m}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{d}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Gm}{L^2}\left(\frac{2\sqrt{2} + 1}{2}\right) = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{\sqrt{L^2 + L^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L^3}{Gm}\left(\frac{4 - \sqrt{2}}{7}\right)}}$$

7.(ITA/2018)

Pela equação do módulo do vetor posição dada no enunciado, concluímos que a distância do afélio ($r_a = r_{máx.}$) ocorrerá quando $\cos\theta$ for mínimo ($\cos\theta = -1$); e a distância do periélio ($r_p = r_{mín.}$) ocorrerá quando $\cos\theta$ for máximo ($\cos\theta = 1$). Assim, temos:

$$\begin{cases} r_p = r_{mín.} = \dfrac{\alpha}{1+\varepsilon\cdot\underbrace{\cos\theta_{máx.}}_{1}} \\ r_a = r_{máx.} = \dfrac{\alpha}{1+\varepsilon\cdot\underbrace{\cos\theta_{mín.}}_{-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_p = \dfrac{\alpha}{1+\varepsilon} \\ r_a = \dfrac{\alpha}{1-\varepsilon} \end{cases}$$

Isolando α e igualando as duas equações, temos:

$$\alpha = r_p + r_p\cdot\varepsilon = r_a - r_a\cdot\varepsilon \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}}$$

Substituindo ε na equação de r_p, temos:

$$r_p = \frac{\alpha}{1+\dfrac{r_a - r_p}{r_a + r_p}} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2\cdot r_a\cdot r_p}{r_a + r_p}}$$

Chamando de M a massa do Sol (considerada muito maior que a do cometa), da Terceira Lei de Kepler, temos:

$$T^2 = \frac{4\cdot\pi^2}{GM}\cdot a^3,$$

em que $a = (r_a + r_p)/2$ é o semieixo maior da órbita elíptica.

Assim, substituindo, para o período de órbita, temos:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}\cdot\left(\frac{r_a + r_p}{2}\right)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{(r_a + r_p)^3}{8G\cdot M}}}$$

8.(ITA/2017)

LETRA: D

Da Terceira Lei de Kepler, vem:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot R^3 \Rightarrow \frac{M}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GT^2} \qquad (I)$$

Da definição de massa específica média (μ), considerando o planeta esférico, temos:

$$\mu = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \mu = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{M}{R^3} \qquad (II)$$

De I e II, vem:

$$\mu = \frac{3}{\cancel{4\pi}} \cdot \frac{\cancel{4\pi^2}^{\,\pi}}{GT^2} \Rightarrow \mu = \frac{3 \cdot 3{,}14}{6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 5\,400^2} = 4{,}8 \cdot 10^3\ kg/m^3 \Rightarrow \boxed{\mu = 4{,}8\ g/cm^3}$$

9.(ITA/2017)

a) A velocidade quadrática média $\sqrt{v^2}$ de um gás, sendo R a constante dos gases, T a temperatura e M sua massa molar, é dada por:

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

A velocidade de escape V em Vênus, sendo r seu raio, M_V sua massa e G a constante de gravitação universal, é dada por:

$$V = \sqrt{\frac{2G \cdot M_V}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}81 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6{,}4 \cdot 10^6}} \Rightarrow V = 1{,}0 \cdot 10^4\ m/s$$

Para os gases CO_2, N_2, Ar, Ne e He, cujas massas molares são, respectivamente, 44 u, 28 u, 40 u, 20 u e 4 u, temos os seguintes valores para suas velocidades quadráticas médias, respectivamente: 645 m/s, 808 m/s, 676 m/s, 956 m/s e 2 139 m/s.

Finalmente, as razões pedidas para cada gás, na ordem representada, são: $6{,}5 \cdot 10^{-2}$, $8{,}1 \cdot 10^{-2}$, $6{,}8 \cdot 10^{-2}$, $9{,}6 \cdot 10^{-2}$ e $2{,}1 \cdot 10^{-1}$.

b) Quanto maior a razão, menor a provável concentração do gás na atmosfera. Assim, em ordem crescente de concentração, temos: He, Ne, N_2, Ar e CO_2.

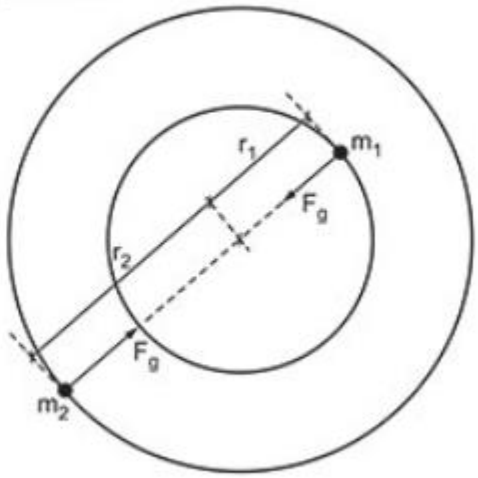
10.(ITA/2016)

LETRA: D

I. Verdadeira. Como a força gravitacional é a única força do sistema binário, o período de revolução será o mesmo para as duas estrelas.

II. Verdadeira. Considerando as duas estrelas, de massas m_1 e m_2, com velocidades angulares ω_1 e ω_2, em órbita circular em torno do centro de massa (C.M.), cuja distância a essa posição é r_1 e r_2, a força gravitacional atuará como resultante centrípeta.

Logo, para a estrela m_1, temos:



$$\left|\begin{array}{l} F_g = \dfrac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{(r_1 + r_2)^2} \\ F_g = m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{G \cdot m_2}{(r_1 + r_2)^2} = \dfrac{4\pi^2}{T^2} \cdot r_1 \quad (I) \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right.$$

Analogamente, para a estrela m_2, temos:

$$\left|\begin{array}{l} F_g = \dfrac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{(r_1 + r_2)^2} \\ F_g = m_2 \cdot \omega^2 \cdot r_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{G \cdot m_1}{(r_1 + r_2)^2} = \dfrac{4\pi^2}{T} \cdot r_2 \quad (II) \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right.$$

Somando as equações (I) e (II), vem:

$$\frac{G \cdot (m_1 + m_2)}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot (r_1 + r_2) \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{(r_1 + r_2)^3}{(m_1 + m_2)}$$

Logo, o período é função apenas da constante gravitacional, da massa total do sistema e da distância entre ambas as estrelas.

III. Falsa. Durante toda a revolução o sistema binário se mantém alinhado com o centro de massa. Considerando que os vetores posição R_1 e R_2 possuem magnitudes diferentes, para um mesmo intervalo de tempo, as áreas varridas terão intensidades diferentes.

11.(ITA/2015)

LETRA: B

Nos pontos pertencentes aos eixos de simetria contidos no plano de uma placa, a linha de ação do campo gravitacional é paralela ao plano, não havendo componentes normais.

12.(ITA/2015)

A energia mecânica da nave em sua órbita circular de raio r_B é dada por:

$$E_{circ.} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r_B} \qquad (i)$$

Nessa órbita, a força gravitacional é igual a resultante centrípeta, portanto:

$$\frac{mv^2}{r_B} = \frac{GMm}{r_B^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r_B} \qquad (ii)$$

Substituindo (ii) em (i), temos:

$$E_{circ.} = \frac{GMm}{2r_B} - \frac{GMm}{r_B} = -\frac{GMm}{2r_B}$$

Para uma órbita elíptica de raio médio $\frac{r_A + r_B}{2}$, a energia mecânica é expressa por:

$$E_{elip.} = -\frac{GMm}{2\left(\frac{r_A + r_B}{2}\right)} = -\frac{GMm}{r_A + r_B}$$

Logo, o acréscimo de energia da transferência das órbitas será:

$$\Delta E = E_{circ.} - E_{elip.} = \frac{-GMm}{2r_B} - \left(\frac{-GMm}{r_B + r_A}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{-GMm}{2r_B} + \frac{GMm}{r_A + r_B} \Rightarrow \boxed{\Delta E = \frac{GMm}{2r_B} \cdot \frac{(r_B - r_A)}{(r_B + r_A)}}$$

Observação: a grandeza apresentada (mrv), na órbita elíptica, só é constante se v corresponder à velocidade perpendicular ao raio vetor.

13.(ITA/2014)

LETRA:C

De acordo com a 3ª Lei de Kepler, para o satélite S, o período de translação ao quadrado é proporcional ao cubo do semieixo maior da sua órbita.
Já para o satélite T, o período de translação ao quadrado é proporcional ao cubo do seu raio orbital.
Como o semieixo maior orbital do satélite S é igual ao raio orbital do satélite T, os satélites têm períodos de translação iguais.

14.(ITA/2013)

LETRA: A

A energia no apogeu e no perigeu é dada por:

$$E_a = \frac{-GMm}{a+e} + \frac{mv^2}{2} \quad (I)$$

$$E_p = \frac{-GMm}{a-e} + \frac{mv'^2}{2} \quad (II)$$

Multiplicando (I) por $(a+e)^2$, (II) por $-(a-e)^2$ e somando as equações, da conservação da energia, vem:

$$[(a+e)^2 - (a-e)^2]E =$$

$$= -GMm(a+e) + GMm(a-e) +$$

$$+ \frac{m}{2}[v(a+e)]^2 - \frac{m}{2}[v'(a-e)^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E = -\frac{GMm}{2a}}$$

15.(ITA/2012)

LETRA: D

A energia liberada no impacto corresponde à energia cinética (E_C) adquirida pelo meteoro. Assim, do Princípio da Conservação da Energia Mecânica, temos:

$$E_{mec}^{final} = E_{mec}^{inicial} \Rightarrow E_C + E_G = E_{C_0} + E_{G_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_C - \frac{G \cdot M \cdot m}{R_T} = \frac{m \cdot \cancelto{0}{v_0^2}}{2} - \frac{G \cdot M \cdot m}{\cancelto{\infty}{r}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_C = \frac{G \cdot M \cdot m}{R_T} \quad (I)$$

Da expressão que determina a aceleração da gravidade na superfície terrestre, temos:

$$g = \frac{GM}{R_T^2} \Rightarrow GM = g \cdot R_T^2 \quad (II)$$

Da definição de massa específica, temos:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (III)$$

Substituindo II e III em I, temos:

$$E_C = g \cdot \frac{R_T^{\cancel{2}} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}{\cancel{R_T}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_C = 10 \cdot 6\,400 \cdot 10^3 \cdot 8\,000 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1 \cdot 10^3)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_C = 2{,}1 \cdot 10^{21}\ J.$$

Uma bomba de hidrogênio com 10 megatons de TNT libera energia dada por:

E = 10 megatons de TNT $\Rightarrow$

$$\Rightarrow E = 10 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^9 = 4 \cdot 10^{16}\ J$$

Assim, o número n de bombas de hidrogênio que corresponde à energia do impacto do meteoro é:

Bombas de hidrogênio	Energia (J)
1	$4 \cdot 10^{16}$
n	$2{,}1 \cdot 10^{21}$

$\Rightarrow$

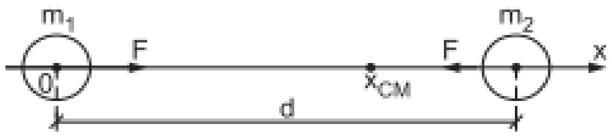
$$\Rightarrow n = \frac{2{,}1 \cdot 10^{21}}{4 \cdot 10^{16}} \Rightarrow n = 52\,500$$

Logo o número aproximado de bombas de hidrogênio é 50 000.

16.(ITA/2012)

LETRA: B

Sendo m_1 e m_2 as massas das estrelas e d a distância entre seus centros, temos:



A distância da estrela m_1 ao centro de massa X_{cm} é dada por:

$$X_{CM} = \frac{m_1 \cancelto{0}{x_1} + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow X_{CM} = \frac{m_2 d}{m_1 + m_2}$$

Como a força gravitacional é a resultante centrípeta, para as duas estrelas, temos:

$$F = R_{cp} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{G\cancel{m_1}m_2}{d^2} = \cancel{m_1}\omega_1^2 X_{CM} \\ \dfrac{Gm_1\cancel{m_2}}{d^2} = \cancel{m_2}\omega_2^2 (d - X_{CM}) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{G\cancel{m_2}}{d^2} = \omega_1^2 \dfrac{\cancel{m_2}d}{m_1 + m_2} \\ \dfrac{G\cancel{m_1}}{d_2} = \omega_2^2 \dfrac{[d(\cancel{m_1} + \cancel{m_2}) - \cancel{m_2}d]}{m_1 + m_2} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \omega_1^2 = \dfrac{G(m_1 + m_2)}{d^3} = \left(\dfrac{2\pi}{T_1}\right)^2 \\ \omega_2^2 = \dfrac{G(m_1 + m_2)}{d^3} = \left(\dfrac{2\pi}{T_2}\right)^2 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1^2}{d^3} = \frac{T_2^2}{d^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

Assim, temos:

I. Correta. O período das estrelas é o mesmo e depende apenas da distância entre elas, da massa total do conjunto e da constante gravitacional.

II. Incorreta. Para a rotação de um quarto de volta, por exemplo, ambas gastam o mesmo tempo $\left(\frac{T_1}{4} = \frac{T_2}{4}\right)$, mas as áreas varridas serão diferentes, já que $R_1 \neq R_2$.

Obs.: A rigor, o período depende também do valor 2π.

17.(ITA/2011)

LETRA: B

Com a passagem do asteroide, o raio da órbita da Terra será reduzido. Pela 3º Lei de Kepler, o seu período de translação também será mais curto. Considerando o ciclo lunar inicial igual a $T_0 = 27$ dias, da 3º lei de Kepler, temos:

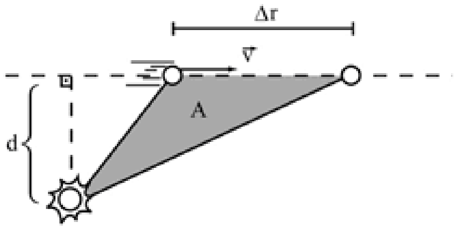
$$\frac{T_0^2}{R_0^3} = \frac{T^2}{R^3} \Rightarrow \frac{27^2}{R_0^3} = \frac{80^2}{R^3} \Rightarrow R \cong 2R_0$$

Logo, a distância Terra-Lua será, aproximadamente, duas vezes o que era antes.

18.(ITA/2010)

LETRA: A

Se deixasse de existir a atração gravitacional entre o Sol e o planeta, este executaria um movimento retilíneo e uniforme.



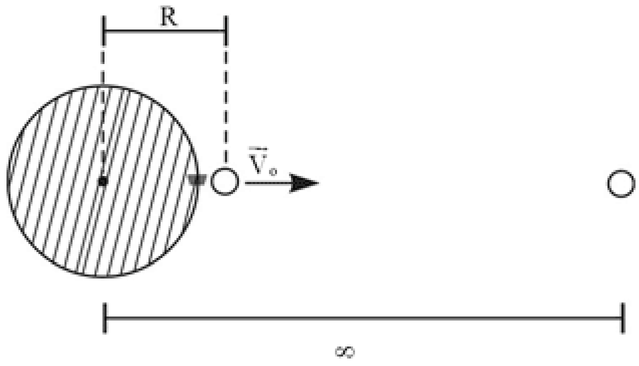
De acordo com a figura:
$A = d \cdot \Delta r = d \cdot v \cdot \Delta t$

Uma vez que **d** representa a distância do centro do Sol à reta da trajetória do planeta e $\vec{v}$ representa o vetor velocidade do planeta, sendo ambos constantes, então **A** é proporcional a Δt. Portanto, o segmento de reta em questão continuaria a percorrer áreas iguais em tempos iguais.

19.(ITA/2010)

LETRA: A

Considerando o lançamento da superfície da Terra:



$$\frac{-GMm}{R} + \frac{m \cdot V_o^2}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad V_o = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Sabendo que $g = \frac{GM}{R^2} \rightarrow M = \frac{gR^2}{G}$

Logo: $v_o = \sqrt{\frac{2G}{R} \cdot \frac{gR^2}{G}} = \sqrt{2gR} \cong 11{,}2 \cdot 10^3 m/s$

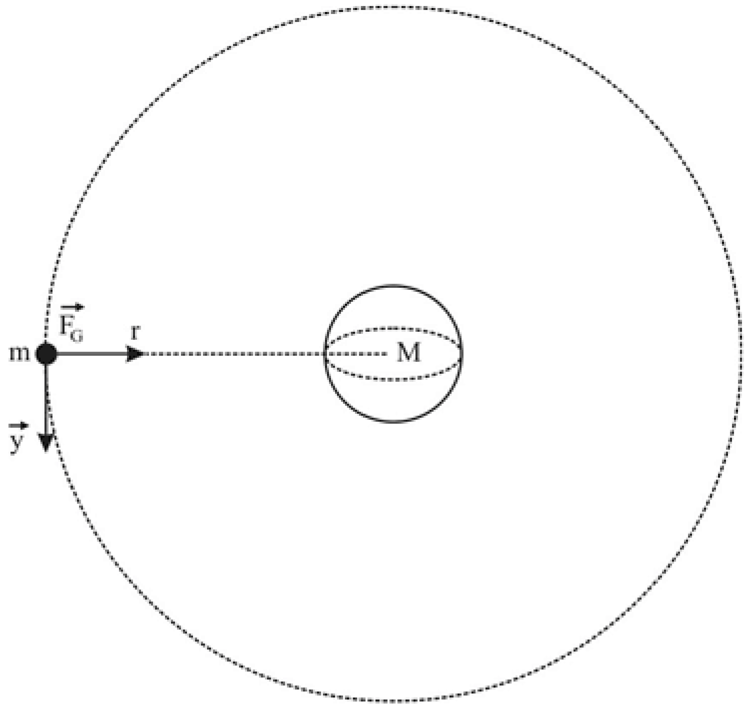
Para a molécula:

$$\frac{1}{2} m_o \cdot v_o^2 = \frac{3}{2} K_B T \quad \rightarrow \quad T = \frac{m_o \cdot v_o^2}{3K_B} = \frac{m_o \cdot v_o^2}{3 \cdot \frac{R}{K_A}}$$

$\rightarrow T = \frac{K_A \cdot m_o \cdot v_o^2}{3R}$, mas KA . $m_o = M_{N2} = 2 \cdot 14 \cdot 10^{-3}$ kg/m_o

$$\rightarrow T = \frac{2 \cdot 14 \cdot 10^{-3} \cdot (11{,}2 \cdot 10^3)^2}{3 \cdot 8{,}31} \cong 1{,}4 \cdot 10^5 K$$

20.(ITA/2010)



i) A figura representa um corpo de massa **m** em órbita em torno de um planeta de massa **M**.

A força gravitacional $F_G = \dfrac{GmM}{r^2}$ atuando no corpo tem a função de resultante centrípeta.

Daí: $\dfrac{\cancel{m}v^2}{\cancel{r}} = \dfrac{G\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v^2 = \dfrac{GM}{r}$

ii) Como se trata de órbita circular, o movimento será circular e uniforme, assim o período será dado por:

$T = \dfrac{2\pi r}{v}$

iii) Da equação acima: $T^2 = \dfrac{4\pi^2 r^2}{v^2}$, onde $v^2 = \dfrac{GM}{r}$

Finalmente:

$$T^2 = \dfrac{4\pi^2 r^2}{\dfrac{GM}{r}} \Rightarrow \boxed{T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM} \cdot r^3}$$

21.(ITA/2009)

LETRA :C

Sendo r o raio da órbita e M_{total} a massa total que atrai a estrela, a velocidade de órbita da estrela vale $v = \sqrt{\frac{GM_{total}}{r}}$. Dessa forma, na presença da matéria escura, temos $M_{total} > M$ e, portanto, a velocidade orbital v é maior do que na ausência da matéria escura.

22.(ITA/2009)

Pela lei da gravitação universal de Newton, podemos escrever:

$$f_{1z} - f_{0z} = \frac{G.M.m_1}{(R+r)^2} - \frac{G.M.m_0}{(R)^2} \quad \therefore f_{1z} - f_{0z} = \frac{G.M.m}{R^2}.\left[\frac{1}{(1+r/R)^2} - 1\right]$$

Considerando $\frac{r}{R} << 1$, temos:

$$f_{1z} - f_{0z} \approx \frac{G.M.m}{R^2}.\left(\cancel{1} - \frac{r}{R} - \cancel{1}\right)$$

$$f_{1z} - f_{0z} = -\frac{2G.M.m.r}{R^3}$$

Agora, façamos o mesmo para $f_{2z} - f_{0z}$:

$$f_{2z} - f_{0z} = \frac{G.M.m_2}{(R-r)^2} - \frac{G.M.m_0}{R^2} \therefore$$

$$f_{2z} - f_{0z} = \frac{G.M.m}{R^2}.\left[\frac{1}{(1-r/R)^2} - 1\right] \therefore$$

$$f_{2z} - f_{0z} = \frac{G.M.m}{R^2}.\left(\cancel{1} + \frac{2r}{R} - \cancel{1}\right) \therefore$$

$$\boxed{f_{2z} - f_{0z} = \frac{G.M.m.r}{R^3}}$$

23.(ITA/2008)

LETRA: D

Da Terceira Lei de Kepler, para os sistemas Sol–Terra e Gliese 581–planeta, temos:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{T_T^2}{R_{ST}^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_S} \\ \dfrac{T_P^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_{581}} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{T_T^2}{R_{ST}^3}}{\dfrac{T_P^2}{R^3}} = \frac{\dfrac{\cancel{4\pi^2}}{\cancel{G}M_S}}{\dfrac{\cancel{4\pi^2}}{\cancel{G}M_{581}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{M_{581}}{M_S} = \left(\frac{T_T}{T_P}\right)^2 \cdot \left(\frac{R}{R_{ST}}\right)^3 = \left(\frac{365}{13}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{M_{581}}{M_S} = 0{,}3}$$

24.(ITA/2007)

Do Princípio da Conservação da Energia Mecânica, temos:

$$E_M^{final} = E_M^{inicial}$$

$$\Rightarrow -\frac{GM \cdot \cancel{m}}{R} + \frac{\cancel{m} \cdot V_0^2}{2} = -\frac{GM \cdot \cancel{m}}{R + h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{2GMh}{R(R + h)}}$$

A aceleração da gravidade na superfície da Terra é

$g = \dfrac{GM}{R^2}$. Assim, temos:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2GMh}{R^2(R + h)} \cdot R} \Rightarrow \boxed{V_0 = \sqrt{\frac{2Rhg}{R + h}}}$$

25.(ITA/2005)

Da Terceira Lei de Kepler, temos:

$$\begin{cases} T^2 = kr^3 \\ k = \dfrac{4\pi^2}{GM_J} \end{cases} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_J} \cdot r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_J}{4\pi^2}}$$

Como a distância (r) do satélite ao centro de Júpiter é $r = R_J + h$ e seu período é $T = 10\ h = 3{,}6 \cdot 10^4$ s, a altitude (h) do satélite é dada por:

$$R_J + h = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_J}{4\pi^2}} \Rightarrow 7{,}0 \cdot 10^7 + h =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(3{,}6 \cdot 10^4)^2 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9 \cdot 10^{27}}{4\pi^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{h = 9{,}1 \cdot 10^7\ m}$$

26.(ITA/2004)

LETRA: C

Como o raio médio (R) é proporcional ao semi-eixo maior e sendo $\frac{T_\alpha}{T_\beta} = \sqrt{2}$, da Terceira Lei de Kepler, temos:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{T_\alpha}{T_\beta}\right)^2 = \left(\dfrac{R_\alpha}{R_\beta}\right)^3 \\ R_\beta = 2R_\gamma \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{R_\alpha}{2R_\gamma}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{R_\alpha}{R_\gamma}\right)^3 = 16$$

Assim, temos:

$$\left(\frac{T_\alpha}{T_\gamma}\right)^2 = \left(\frac{R_\alpha}{R_\gamma}\right)^3 \Rightarrow \boxed{\frac{T_\alpha}{T_\gamma} = 4}$$

27.(ITA/2003)

LETRA: D

A intensidade do campo gravitacional G_1 é dada por:

$$G_1 = \frac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{R^2} \Rightarrow G_1 = G\rho\frac{4}{3}\pi R$$

A intensidade do campo gravitacional G' gerado por uma esfera de raio a e densidade ρ, a uma distância de P igual a (R – d), é dada por:

$$G' = \frac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi a^3}{(R-d)^2}$$

A intensidade do campo gravitacional G_2 é dada por:

$$G_2 = G_1 - G' = G\rho\frac{4}{3}\pi\left[R - \frac{a^3}{(R-d)^2}\right]$$

Assim, a variação relativa $\frac{G_1 - G_2}{G_1}$ é dada por:

$$\frac{G_1 - G_2}{G_1} =$$

$$= \frac{G\rho\frac{4}{3}\pi R - G\rho\frac{4}{3}\pi\left[R - \frac{a^3}{(R-d)^2}\right]}{G\rho\frac{4}{3}\pi R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{G_1 - G_2}{G_1} = \frac{a^3}{R(R-d)^2} = X$$

Assim, a variação relativa X é máxima quando (R – d) é mínimo e isto ocorre para d = R – a. Logo, R – d = R – (R – a) = a.

Assim, temos:

$$X_{máx.} = \frac{a^3}{R(a)^2} \Rightarrow \boxed{X_{máx.} = \frac{a}{R}}$$