

LISTA 3 - PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A)

PROPRIEDADE E SOMA DOS TERMOS DE UMA PA

1.

a) Mostre que na progressão aritmética $(a_1; a_2; a_3, \dots; a_{10}; \dots)$,

$$a_7 + a_4 = a_1 + a_{10}$$

b) Calcule, em função de a_1 e a_{10} , a soma dos dez primeiros termos da P.A.

2. (UNIFESP) – Uma pessoa resolveu fazer sua caminhada matinal passando a percorrer, a cada dia, 100 metros mais do que no dia anterior. Ao completar o 21º dia de caminhada, observou ter percorrido, nesse dia, 6 000 metros. A distância total percorrida nos 21 dias foi de:

- a) 125 500 m. b) 105 000 m. c) 90 000 m.
d) 87 500 m. e) 80 000 m.

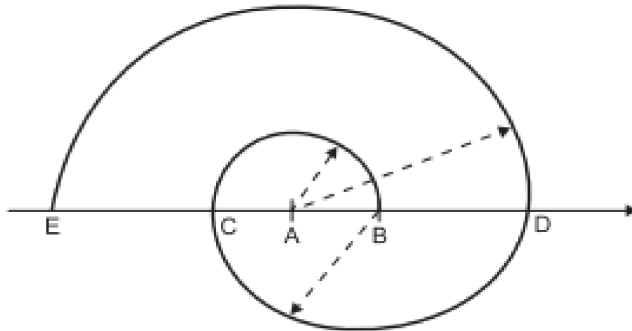
3. (UNIFOR) – A sequência (a_n) , com n um número inteiro positivo, é definida, recursivamente por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right) a_n, \text{ para } n \geq 1. \end{cases}$$

O valor da média aritmética dos 100 primeiros termos desta sequência é:

- a) 50 b) 50,5 c) 51 d) 51,5 e) 52

4. (FGV) – Chamamos de falsa espiral de dois centros aquela construída da seguinte forma: os dois centros são os pontos A e B. Traçam-se semicircunferências no sentido anti-horário, a primeira com o centro em A e raio AB, a segunda com centro em B e raio BC, a terceira com centro em A e raio AD, repetindo esse procedimento em que os centros se alternam entre A e B, como mostrado na figura abaixo.



Determine a distância entre A e B se, ao completar duzentas semicircunferências, o comprimento total dessa falsa espiral for $100\,500\pi$ metros.

5. (UNIVEST) – Seja S_7 , S_8 e S_9 respectivamente iguais à soma dos 7, 8 e 9 termos iniciais de uma mesma progressão aritmética. A razão r dessa P.A. pode ser expressa pela relação:

- a) $r = S_9 + S_7 - S_8$ b) $r = S_9 + S_7 - 2S_8$
c) $r = S_9 + 2S_7 - 2S_8$ d) $r = S_9 - S_7 + S_8$
e) $r = S_9 - S_7 - 2S_8$

6. (UEM) – Considere os números naturais colocados ordenadamente em linhas da disposição triangular mostrada na figura e suponha que a distribuição continue, indefinidamente, obedecendo ao mesmo padrão.

			1				
			2	3	4		
		5	6	7	8	9	
	10	11

Sobre o exposto, é correto afirmar que

- 01) a coluna central não contém números compostos.
02) a linha de ordem k contém $(2k - 1)$ números naturais, $k = 1, 2, \dots$
04) a quantidade de números naturais escritos até o final da linha k é k^2 , $k = 1, 2, \dots$
08) a soma de todos os números naturais escritos até o final da 20^{a} linha é 80.200.
16) o número natural 628 é o quarto número da 26^{a} linha.

1.

a) $a_7 + a_4 = a_{10} - 3r + a_1 + 3r = a_1 + a_{10}$

b) Como $a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = \dots = a_5 + a_6$ tem-se:

$$\left. \begin{aligned} S_{10} &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 + a_9 + a_{10} \\ S_{10} &= a_{10} + a_9 + a_8 + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2S_{10} = \underbrace{(a_1 + a_{10}) + (a_1 + a_{10}) + \dots + (a_1 + a_{10})}_{10 \text{ vezes}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2S_{10} = (a_1 + a_{10}) \cdot 10 \Rightarrow S_{10} = (a_1 + a_{10}) \cdot 5$$

2.

As distâncias diárias percorridas pela pessoa formam uma progressão aritmética de razão $r = 100$ m e vigésimo primeiro termo $a_{21} = 6\,000$ m.

Assim, em metros, temos:

$$a_{21} = a_1 + (21 - 1) \cdot r \Rightarrow 6\,000 = a_1 + 20 \cdot 100 \Rightarrow a_1 = 4\,000$$

A distância total percorrida nos 21 dias foi, também em metros,

$$S_{21} = \frac{(a_1 + a_{21}) \cdot 21}{2} = \frac{(4\,000 + 6\,000) \cdot 21}{2} = 105\,000$$

Resposta: B

3.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \left(\frac{2}{1}\right) \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_3 = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot a_2 = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$

$$a_4 = \left(\frac{4}{3}\right) \cdot a_3 = \frac{4}{3} \cdot 3 = 4$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{100} = \left(\frac{100}{99}\right) \cdot a_{99} = \frac{100}{99} \cdot 99 = 100$$

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2}$$

$$S_{100} = 5050 \text{ e a média dos 100 primeiros termos é } \frac{S_{100}}{100} = 50,50$$

Resposta: B

4.

Seja $AB = R$, as duzentas semicircunferências têm raios $R, 2R, 3R, \dots, 200R$.

Comprimento total da falsa espiral = $100\,500\pi$ \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \pi \cdot R + \pi \cdot 2R + \pi \cdot 3R + \dots + \pi \cdot 200R = 100\,500\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(R + 200R) \cdot 200}{2} = 100\,500 \Leftrightarrow R = 5 \text{ m}$$

Resposta: 5 m

5.

$$a_8 = S_8 - S_7$$

$$s_9 = S_9 - S_8$$

$$r = a_9 - a_8 = [S_9 - S_8] - [S_8 - S_7]$$

$$r = S_9 + S_7 - 2S_8$$

Resposta: B

6.