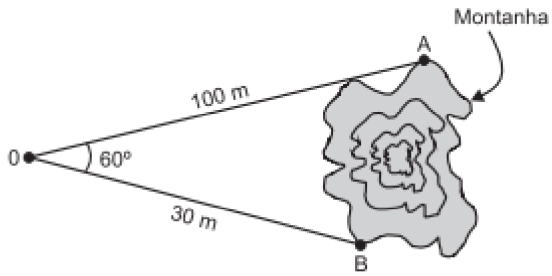
MATEMÁTICA - TRIGONOMETRIA

AULAS 1 - LEIS DO SENOS E LEI DOS COSSENOS

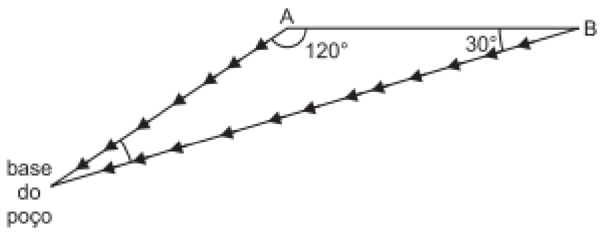
(RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO QUALQUER)

1. **(UNITAU)** – Determinar aproximadamente a distância AB entre os pontos inacessíveis na figura, sabendo que um observador viu ambos os pontos A e B, conforme as distâncias e ângulo especificado.



a) 79 m b) 80 m c) 90 m d) 110 m e) 37 m

2. **(UEL)** – Duas plataformas marítimas (**A** e **B**) estão localizadas de tal forma que os ângulos de emissão de sinais de comunicação com a base de um poço submarino são, respectivamente, iguais a 120° e 30°, conforme indica a figura a seguir:



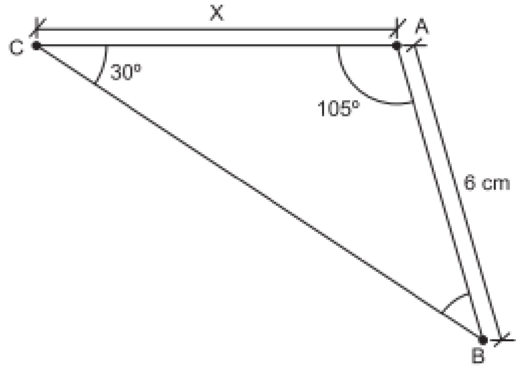
Admitindo-se que os sinais se desloquem em linha reta até a base do poço e que a distância entre a plataforma **A** e **B**, em linha reta, seja AB = 1km, a maior distância entre a base do poço e uma das duas plataformas, em km, é, aproximadamente, igual a:

a) 1,7 b) 1,5 c) 1,3 d) 1,1 e) 1,0

3. **(FUVEST)** – Os comprimentos dos lados de um triângulo ABC formam uma PA. Sabendo-se também que o perímetro de ABC vale 15 e que o ângulo $\hat{A}$ mede 120°, então o produto dos comprimentos dos lados é igual a

a) 25 b) 45 c) 75 d) 105 e) 125

4. **(FMJU)** – Uma área plantada, de forma triangular, contém 3 pontos de abastecimento de água para o processo de irrigação, conforme mostra a figura, cuja escala é de 1:10.000. A distância entre os pontos A e C é, aproximadamente, igual a



Dado: $\sqrt{2} = 1,41$

a) 0,56 km b) 0,78 km c) 0,84 km
d) 0,96 km e) 1,84 km

5. **(FATEC)** – Sejam α, β e γ as medidas dos ângulos internos de um triângulo. Se $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta} = \dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\gamma} = 1$ e o perímetro do triângulo é 44, então a medida do maior lado desse triângulo é

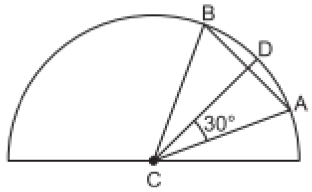
a) 5. b) 10. c) 15. d) 20. e) 25.

6. **(CEFET-RJ)** – Num triângulo ABC, sabe-se que o ângulo $\hat{A} = 60°$, que o lado AB mede 2 e a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ tem medida 2. Determine:

a) Os outros ângulos do triângulo ABC.
b) A medida do lado BC.

7.(FUVEST)

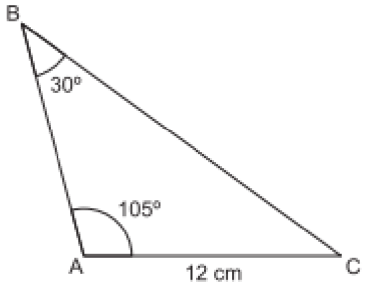
Em uma semicircunferência de centro C e raio R, inscreve-se um triângulo equilátero ABC. Seja D o ponto onde a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ intercepta a semicircunferência. O comprimento da corda $\overline{AD}$ é:



a) $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ b) $R\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ c) $R\sqrt{\sqrt{2}-1}$

d) $R\sqrt{\sqrt{3}-1}$ e) $R\sqrt{3-\sqrt{2}}$

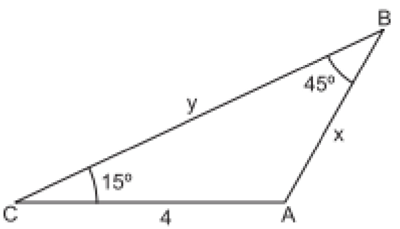
8. **(MACKENZIE)** – Três ilhas A, B e C aparecem num mapa, em escala 1:10 000, como na figura. Das alternativas, a que melhor aproxima a distância entre as ilhas A e B é:



a) 2,3 km b) 2,1 km c) 1,9 km

d) 1,4 km e) 1,7 km

9. **(FAC. MED. TRIÂNGULO MINEIRO)** – Se sen 15° = a, os valores de x e y na figura são, respectivamente,



a) $4a\sqrt{2}$ e $2\sqrt{6}$

b) $2a\sqrt{3}$ e $2\sqrt{3}$

c) a e $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $a\sqrt{6}$ e $2a\sqrt{3}$

e) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ e $6\sqrt{2}$

RESOLUÇÃO

1.

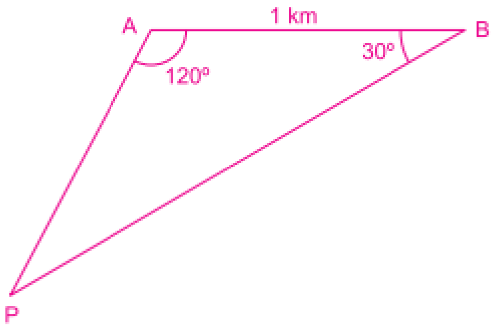
No ΔOAB, aplicando-se Lei dos Cossenos, temos:

$AB^2 = 30^2 + 100^2 - 2 \,.\, 30 \,.\, 100 \,.\, \cos 60° = 900 + 10000 - 3000 = 7900$

Portanto: $AB = \sqrt{7900} = 10 \,.\, \sqrt{79} \cong 90$ m

Resposta: C

2.



A partir do enunciado, conclui-se que $A\hat{P}B = 30°$ e, portanto, o ΔABP é isósceles, $AP = AB = 1$km. A maior distância do poço P a uma das plataformas (B), pode ser obtida, aplicando-se a Lei dos Cossenos, assim:

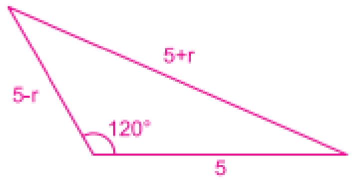
$PB^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, \cos 120° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow PB^2 = 1 + 1 - 2\left(-\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow PB^2 = 3 \Leftrightarrow PB = \sqrt{3} \cong 1{,}7$ km

Resposta: A

3.

As medidas dos lados desse triângulo podem ser expressas por:
$x - r$, x e $x + r$, com $x > 0$ e $r > 0$.
Assim: $x - r + x + x + r = 15 \Leftrightarrow x = 5$
O triângulo fica:



De acordo com a lei dos cossenos, tem-se:

$(5 + r)^2 = (5 - r)^2 + 5^2 - 2 \,.\, 5 \,.\, (5 - r) \,.\, \cos 120° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 25 + 10r + r^2 = 25 - 10r + r^2 + 25 + 25 - 5r \Leftrightarrow$

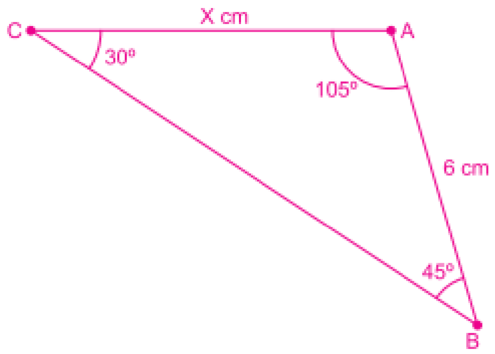
$\Leftrightarrow 25r = 50 \Leftrightarrow r = 2$

Logo, o produto dos comprimentos dos lados desse triângulo é igual a:

$5 \,.\, (5 - r) \,.\, (5 + r) = 5 \,.\, (5 - 2) \,.\, (5 + 2) = 105$

Resposta: D

4.



1º) Se $\hat{A} = 105°$ e $\hat{C} = 30°$ resulta $\hat{C} = 45°$

2º) Pela lei dos senos:

$$\frac{x}{\text{sen } 45°} = \frac{6}{\text{sen } 30°} \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

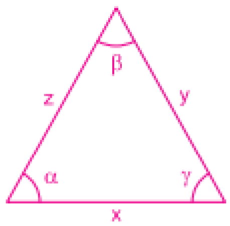
$$\Leftrightarrow x = 6 \,.\, \sqrt{2} \cong 6 \,.\, 1{,}41 = 8{,}46 \text{ cm}$$

3º) Na escala 1: 10 000, a distância AC é igual a:
84 600 cm ≅ 0,84 km

Resposta: C

5.

A partir do enunciado, e considerando a figura abaixo, pela lei dos senos, temos:



1.º) $$\frac{y}{\text{sen } \alpha} = \frac{z}{\text{sen } \gamma} \Leftrightarrow \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \gamma} = \frac{y}{z} = 1 \Leftrightarrow y = z$$

2.º) $$\frac{y}{\text{sen } \alpha} = \frac{x}{\text{sen } \beta} \Leftrightarrow \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = \frac{y}{x} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow y = \frac{3}{5} \,.\, x$$

Como o perímetro do triângulo é 44, temos:

$$x + y + z = 44 \Leftrightarrow x + \frac{3}{5} \,.\, x + \frac{3}{5} \,.\, x = 44 \Leftrightarrow$$

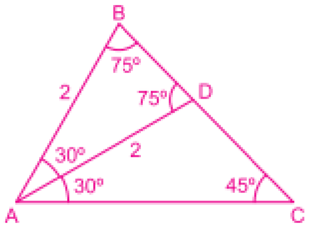
$$\Leftrightarrow 5x + 3x + 3x = 44 \,.\, 5 \Leftrightarrow x = 20$$

O maior lado do triângulo é 20, pois os outros lados são: y = z = 12

Resposta: D

6.

a) A partir do enunciado, com $\overline{AD}$, bissetriz do ângulo $\hat{A}$, temos:



1º) AD = AB = 2 ➡ ΔABD é isósceles e $A\hat{B}D = A\hat{D}B = 75°$

2º) Como $\hat{A} = 60°$, $\hat{B} = 75°$, resulta $\hat{C} = 45°$

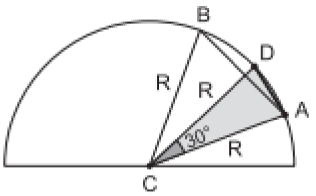
b) Pela Lei dos Senos; no ΔABC, temos:

$$\frac{AB}{\text{sen } 45°} = \frac{BC}{\text{sen } 60°} \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BC = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

Respostas: a) $\hat{B} = 75°$ e $\hat{C} = 45°$
b) $\sqrt{6}$

7.



No triângulo ACD, tem-se (Lei dos Cossenos):

$(AD)^2 = R^2 + R^2 - 2 \,.\, R \,.\, R \,.\, \cos 30° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (AD)^2 = 2R^2 - 2R^2 \,.\, \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (AD)^2 = R^2 \,.\, (2 - \sqrt{3}) \Rightarrow AD = R \,.\, \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Resposta: A

8.

Resolução

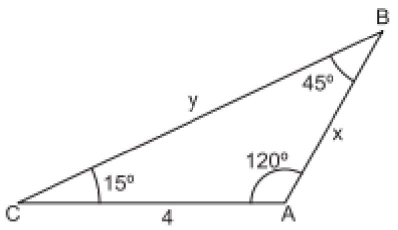
No triângulo ABC do mapa, resulta $A\hat{C}B = 45°$, e aplicando a lei dos senos a ele, temos:

$$\frac{AB}{\text{sen } 45°} = \frac{AC}{\text{sen } 30°} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{12}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow AB \cong 17 \text{ cm}$$

Sendo o mapa em escala 1:10000, que significa 1 cm do mapa equivaler a 10000 cm na realidade, resulta que a distância entre as ilhas A e B é igual a 170000 cm = 1,7 km.

Resposta: E

9.



Pela Lei dos Senos, temos:

$$\frac{4}{\text{sen } 45°} = \frac{x}{\text{sen } 15°} = \frac{y}{\text{sen } 120°} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x}{a} = \frac{y}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow x = 4 \,.\, \sqrt{2} \,.\, a \text{ e } y = 2\sqrt{6}$$

Resposta: A